OM

IKKE-ANALYTISKE KURVER

AF

C. JUEL

D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, 7. Række, naturvidensk. og mathem. Afd. I. 6

KØBENHAVN
BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI
1906

FORORD.

Det foreliggende Arbejde slutter sig i alt væsentligt til et tidligere: „Indledning i Læren om de grafiske Kurver“, der findes i Videnskabernes Selsk. Skr. 6. R. X, 1899. Denne Forbindelse fremtræder tydeligst i nærværende Arbejdes første Del, § 1 til § 5, der giver forskellige Tillæg til den tidligere Bestemmelse af Formerne af Kurver af fjerde Orden. I § 1 tager jeg Hensyn til den særlige Vedtægt, at man vil regne ethvert Punkt, der er fælles for Kurven og en ret Linie, som et enkelt Punkt. Herved kan der tilkomme nogle nye Former foruden mindre væsentlige Modifikationer af de tidligere. Medens det saaledes tidligere blev bevist, at en Kurve af fjerde Orden ikke kan have flere end 3 Spidser, er der nu med den nye Vedtægt Mulighed for 4 saadanne, hvilket giver Anledning til én ny Form; dernæst kan Kurven nu have tredobbelte Tangenter, hvilket giver 6 nye Former. I § 2 betragter jeg særlig de af de tidligere bestemte Kurver, der ikke har Infleksionspar (paa indadgaaende Buer), og finder under denne Forudsætning Kurvernes Klasse. Den bliver mindst 4 og højst 8 og giver en nyttig Kontrol for de i § 3 angivne Former for Kurverne af fjerde Klasse.

I alt det foregaaende har jeg kun behandlet en enkelt Gren af Kurven; i § 4 samler jeg for samtlige Typer af Kurvegrene, hvad man kan sige om den Kurve af fjerde Orden, der er sammensat af adskilte Grene. I § 5 gaar jeg noget ind paa ikke-analytiske men overalt éntydige Punktafhængigheder i Planen, og finder ved en let Udvidelse af Betragtninger af Chasles, at der ved en saadan Afhængighed altid maa findes mindst ét Punkt, der svarer til sig selv.

Den største og væsentligste Del af mit Arbejde handler dernæst om Rumkurver. Enhver Kurve, der kommer i Betragtning, tænker jeg mig sammensat af „elementære Buer“ d. v. s. Buer af Kurver af tredie Orden. Begyndelsen sker derfor i § 6 med den almindelige Lære om Rumkurver af tredie Orden; den lader sig let føre tilende og er delvis behandlet tidligere. Helt tilstrækkelige er mine Hjælpemidler ikke, hvilket tydeligst ses ved den dobbelt omskrevne udfoldelige Flade, hvis Eksistens jeg har maattet tage rent umiddelbart. Paa dette som paa flere andre Steder vil supplerende Undersøgelser være ønskelige. Jeg har dog i § 7 forsøgt at give en Række Beviser for visse indledende Sætninger, der angaar Variationen i Antallet af de gennem et Punkt gaaende Oskulationsplaner, Dobbeltsekanter o. s. v.

Efter nogle almindelige Betragtninger, der søger at samle det lidet, man synes at kunne sige om almindelige Fjerdegradskurver, gaar jeg i § 9 og § 10 ind paa nogle specielle men vigtige og nærliggende Former. Disse dannes dels af Skærings-kurver mellem to (almindeligvis ikke algebraiske) Kegler af anden Orden, dels af de Kurver af fjerde Orden paa en Hyperboloide, der har det ene System af dennes Frembringere til Trisekanter. Medens de førstnævnte Kurvers Theori lader sig behandle nogenlunde udtømmende, har jeg for de sidstnævntes Vedkommende kun formaaet at gennemføre Theorien for det Tilfælde, at der ikke findes berørende Trisekanter. Dog forekommer det mig, at de almindelige Bestemmelser af de stationære Planers Antal har Interesse.

Paa Hyperboloiden har jeg endvidere betragtet de Kurver af $n$te Orden, som af alle Frembringerne af det ene System skæres i $n-1$ Punkter. Her viser det sig ret overraskende, at samtlige karakteristiske Tal lader sig finde ved de simple Metoder, jeg bruger. Sætningerne i dette Afsnit er saavidt jeg ved væsentlig nye selv om man holder sig til det specielle Tilfælde, at Kurverne er algebraiske[1].

I § 13 gaar jeg ind paa det vanskelige Spørgsmaal om den ikke-analytiske Eksistens af de betragtede Kurver. De benyttede Hjælpemidler er dels den her beviste Sætning, at en tilstrækkelig Betingelse for, at en Oval skæres af en Cirkel i højst 4 Punkter, er, at dens Evolut er af fjerde Klasse, dels den mærkelige Sætning fra Dr. Bøhmes Disputats, som siger, at ethvert Keglesnit gennem 5 Punkter af en Oval er en Ellipse, naar alle femdobbelt rørende Keglesnit er Ellipser. Ved de i Afhandlingen sidst opstillede Eksistenssætninger er dog benyttet en ikke eksakt Grænseovergang, som stærkt opfordrer til fornyede Undersøgelser.

De i det sidste Afsnit fremsatte Sætninger om vindskæve Flader giver kun lidt. Jeg er dog tilbøjelig til at tro, at netop de vindskæve Flader vil give den nærmest liggende Mulighed til at komme videre med den saa lidt undersøgte Theori for ikke-analytiske Dannelser.

[1]) Sé dog Mr. A. Scott: On the circuits of plane curver, Transact. of the American Math. Society 1902.

§ 1.

Biformer af Kurver af tredie og fjerde Orden, naar hvert fælles Punkt med en ret Linie regnes enkelt.

Ved den tidligere Opregning af Formerne for Kurver af tredie og fjerde Orden er vi gaaet ud fra, at det af de fælles Punkter for Kurven og en Tangent til denne, der falder i Røringspunktet, skal regnes dobbelt, naar Tangenten berører i et sædvanligt Punkt, og tredobbelt, naar den berører i et Infleksionspunkt eller en Spids (af første Art). Grunden til denne Vedtægt ligger deri, at man altid kan finde en ret Linie, der er nærliggende til Tangenten og som i det første Tilfælde skærer i to, i de sidste i tre enkelte Punkter, der er nærliggende ved Røringspunktet. I Analogi hermed har vi regnet det Skæringspunkt mellem Kurven og en vilkaarlig Linie gennem en Spids, der faldt i dette Punkt, for dobbelt.

Det er imidlertid ikke udelukket, at der kan være flere Former at tage Hensyn til, naar man vil gaa ud fra den nye Vedtægt, at hvert fælles Punkt undtagelsesløst skal regnes for enkelt. Ganske vist er det for en Kurve af $n$te Orden i hvert Fald udelukket, at en ret Linie a, der i et Punkt A har (efter den tidligere Vedtægt) r sammenfaldende Skæringspunkter med Kurven, desuden kan skære denne i flere end $n-r$ enkelte Punkter; i saa Fald kan man altid finde en Nabolinie til a, der vilde skære i flere end n Punkter. Men der er den Mulighed, at Linien a to Gange kunde skære i sammenfaldende Punkter f. Eks. i et Punkt A være Vendetangent og samtidig i et Punkt B være en sædvanlig Tangent. Her kan det ske, at de Nabolinier til a, der skærer i 3 Nabopunkter til A netop er de, der ikke skærer Kurven i Nærheden af B, og omvendt. Dette fremhævede Tilfælde kan allerede optræde ved Kurverne af tredie Orden (se Fig. 1) og det er den eneste af de Biformer, vi her tager i Betragtning, som kan optræde ved disse Kurver. Man ser, at den optrædende Særegenhed kun i ringe Grad paavirker Figurens Karakter.

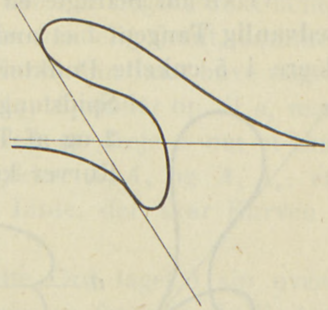
Fig. 1.

Vi vil nu holde os til Kurverne G^4 af fjerde Orden. Her kan ogsaa en Vendetangent én eller flere Gange tillige være sædvanlig Tangent, og det kan ské ved enhver af de fire Typer. Da Formerne kun bliver lidt ændrede, nøjes vi med som Eksempel at tage en Kurve af den tredie Type (se Fig. 2).

Den Mulighed, at en Linie to Gange er Vendetangent, kan ligeledes indtræde for enhver af de fire Typer (se Fig. 3, hvor Kurven hører til den tredie Type). Det

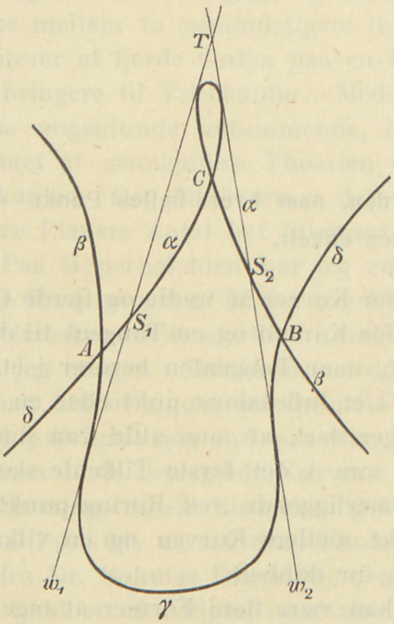

Fig. 2.

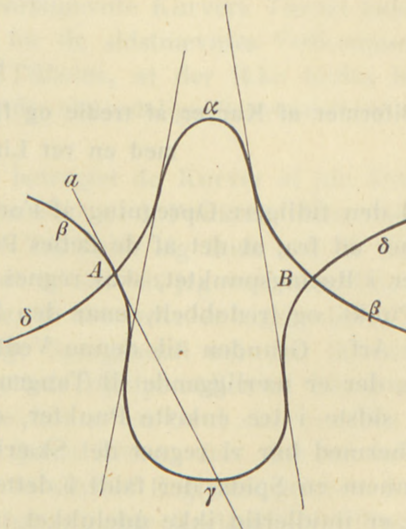

Fig. 3.

Tilfælde, at en Vendetangent gaar gennem en Spids, kan ligeledes optræde ved enhver af de Typer, der overhovedet kan frembyde en Spids, og det hvadenten Vendetangenten tillige berører i Spidsen eller ikke (se Fig. 4, hvor Kurven hører til den fjerde Type).

Vi vil nu betragte en Spidstangent a. Denne kan aabenbart ikke tillige være sædvanlig Tangent i et andet Punkt, da en Nabolinie til a i saa Fald vilde kunne skære i 5 enkelte Punkter. Men det er muligt, at en og samme Linie kan være Spidstangent to Gange; dette kan ské baade for Kurven af Typen 2 og af Typen 4 (se Fig. 5 og Fig. 6). For de førstnævnte af disse Kurver kan det endogsaa ské to Gange (se Fig. 7).

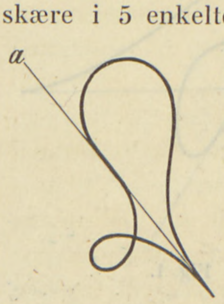

Fig. 4.

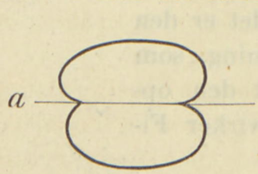

Fig. 5

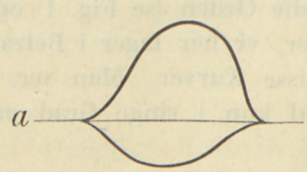

Fig. 6.

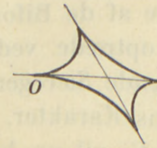

Fig. 7.

(1) Man har nemlig med den nye Vedtægt — i Modsætning til det tidligere: E n K u r v e a f f j e r d e O r d e n k a n h a v e 4 o g h ø j e s t 4 S p i d s e r, d e r i s a a F a l d

parvis maa have samme Linie til Spidstangent; Kurven har ingen andre Singulariteter.

Med den nye Vedtægt gælder det nemlig som tidligere, at der gennem et Dobbeltpunkt eller en Spids O kun kan gaa to Linier, der udenfor O skærer i to sammenfaldende Punkter. Men man maa erindre, at nu gælder Røringspunktet for en gennem O gaaende Spidstangent ikke for sammenfaldende Punkter, men derimod som før en Spids O_1, saafremt Linien OO_1 ikke er Tangent i O_1. Nu er det øjensynligt, at Kurven ikke kan have en og samme Linie til Spidstangent i tre forskellige Punkter. Der kan derfor, naar OO_1 berører i O_1, højest findes to Spidser forskellige fra O og O_1. Da man paa samme Maade ser, at OO_1 maa være Spidstangent i O, er Sætningen bevist; dens sidste Del følger nemlig af det tidligere.

Vi har endnu tilbage at betragte den Mulighed, at en ret Linie a tre Gange kan have sammenfaldende Punkter fælles med Kurven. Det er øjensynligt, at a hverken kan være Spidstangent eller Vendetangent i noget af disse Punkter; den maa enten 3 Gange være sædvanlig Tangent eller den maa indeholde 1, 2 eller 3 Spidser. Vi kan med en fælles Benævnelse sige, at Kurven har en tredobbelt Tangent. Man har nu:

Naar en Kurve af fjerde Orden har en tredobbelt Tangent a, kan der ikke findes nogen anden ret Linie b, der to eller flere Gange skærer Kurven i sammenfaldende Punkter (efter den tidligere Vedtægt). (2)

Derved, at b f. Eks. i B skærer i sammenfaldende Punkter, skal i denne Forbindelse forstaas, at man ved at dreje b om et af sine Punkter, der er forskelligt fra B, faar adskilte Skæringspunkter med Kurven ved at dreje en lille Vinkel til den ene Side, medens disse forsvinder, naar man drejer om samme Punkt en lille Vinkel til den modsatte Side. Lad nu først b to og kun to Gange have sammenfaldende Punkter B_1 og B_2 fælles med Kurven. Ved at dreje b en lille Vinkel om et Punkt, der enten ligger paa det endelige Liniestykke $B_1 B_2$ eller paa dettes Forlængelse, kan man altid skaffe sig en ret Linie b_1, der ikke har noget Punkt fælles med Kurven. Omprojiceres nu denne saaledes, at b_1 falder uendelig fjernt, kommer Kurven til at falde helt i det endelige. Men en saadan Kurve kan ikke have nogen tredobbelt Tangent. Alle de Buer, der lad os sige i A_1, A_2, A_3 støder op til a, maa nemlig her ligge i samme Halvplan begrænset af a, og ved at dreje a om et saadant af dens Punkter, der ikke ligger i de endelige Stykker $A_1 A_2$ og $A_1 A_3$, en lille Vinkel ind i denne Halvplan, vilde man faa en ret Linie, der skar Kurven i 6 Punkter.

Linien b kan altsaa ikke være Dobbelttangent, dette Ord taget i sin ovennævnte udvidede Betydning. Men den kan heller ikke være en fra a forskellig tredobbelt Tangent. Af de tre Buer, der støder op til b, maa nemlig i Overensstemmelse med det nysnævnte de to af Buerne α_1 og α_3 ligge paa den ene Side af a, medens den tredie α_2 ligger paa den anden Side. Giver man dernæst α_2 en lille Ændring, der ikke forandrer Kurvens Orden, idet vi sørger for, at den ikke derved kommer til at skære b, vil man kunne faa en Kurve med en tredobbelt Tangent b og en Dobbelttangent a, hvilket er vist at være umuligt.

Ved den nævnte lille Ændring af en Bue berørende a udleder man altsaa af den oprindelige en ny Kurve af fjerde Orden, der ikke har andre Dobbelttangenter end de tre, der er fælles for Bueparrene: a_1 og a_2, a_2 og a_3, a_1 og a_3. Omvendt ser man, at alle Former for Kurver af fjerde Orden med en tredobbelt Tangent maa kunne faas som Grænseformer for Kurver med tre og kun tre Dobbelttangenter, idet disse konvergerer mod at falde sammen. Vi vil først lade disse Dobbelttangenter være sædvanlige, idet de Former, hvor en Tangent erstattes med en Linie gennem en Spids, er lette at udlede af de fundne.

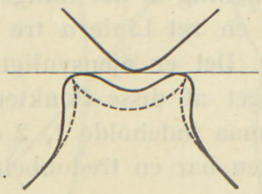
Fig. 8.

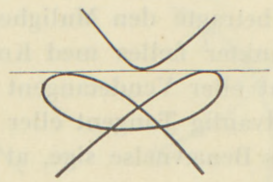
Fig. 9.

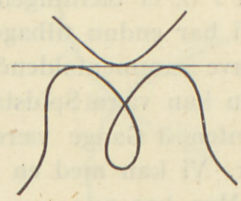
Fig. 10.

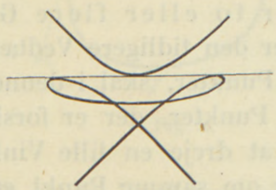
Fig 11.

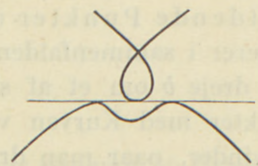
Fig. 12.

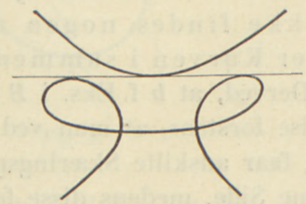
Fig. 13.

Af Kurver med 3 Dobbelttangenter findes nu kun følgende:

1. Kurven af første Type uden Dobbeltpunkter og med tre Infleksionspar.
2. Kurven af anden Type med 3 Dobbeltpunkter og ingen Vendetangenter.
3. Kurven af anden Type med ét Dobbeltpunkt og to Infleksionspar.
4. Kurven af fjerde Type med 3 Sløjfer uden Infleksionspar.
5. Kurven af fjerde Type med ét Dobbeltpunkt, ét Infleksionspar og to isolerede Vendetangenter.
6. Kurven af fjerde Type med 2 Dobbeltpunkter, intet Infleksionspar og to isolerede Vendetangenter.

Om nu virkelig hver af disse eneste Muligheder giver Anledning til en Kurve med en tredobbelt Tangent, maa undersøges direkte, og Figurerne viser tilstrækkeligt, at det er Tilfældet. De findes angivne Fig. 8—13.

Røringspunkterne med den tredobbelte Tangent kan erstattes med Spidser; Muligheden heraf illustreres tilstrækkeligt ved den punkterede Kurve i Fig. 8.

Den oprindelige Opfattelse, hvorefter fælles Punkter regnes med Multiplicitet, er dog ubetinget baade den naturligste og den fordelagtigste, og det er den, vi i det følgende paany ubetinget vil fastholde baade i Planen og i Rummet.

§ 2.

Om Klassen af Kurver af tredie og fjerde Orden.

Ved Klassen af en Kurve forstaar vi det højeste Antal af Tangenter, der fra noget Punkt i Planen kan drages til Kurven. Efter Udviklingerne i „Indledning“ § 4 vil Klassen af en fuldstændig kontinuert Kurve af tredie Orden være 4 eller 6. De tre Vendetangenter danner fire Trekanter og i én af disse ligger intet Punkt af Kurven; naar nu Klassen skal være 6, vil der fra ethvert Punkt af den nævnte Trekant Δ udgaa 6 Tangenter, men højest 4 fra ethvert andet Punkt i Planen (sé „Indledning“ Side 33).

For det følgendes Skyld vil det imidlertid ogsaa være nødvendigt at bestemme Klassen for de Kurver af tredie Orden, der har et fremspringende Punkt; ved denne Bestemmelse vil vi ikke medregne de gennem et Punkt gaaende uegentlige Tangenter. Nu har man:

Klassen for en Kurve af tredie Orden med et fremspringende Punkt af første Art (en Torn) er lig 3. (1)

Gennem et fremspringende Punkt O af første Art gaar der, som vi tidligere har bevist, ikke nogen Tangent, der berører udenfor O. Lader vi nu et Punkt M bevæge sig paa Kurven ud fra O, udgaar der, naar M er i Nærheden af O og altsaa overalt, kun én Tangent foruden Tangenten i M. For at finde det højeste Antal af Tangenter, der kan udgaa fra et vilkaarligt Punkt P i Planen, drager vi gennem P en ret Linie l, der skærer Kurvens eneste Vendetangent i A og Kurven i ét eller flere Punkter. A kan nu ikke paa l skille P fra Skæringspunkter, og det maa være muligt langs l at komme fra P til et Kurvepunkt uden undervejs hverken at overskride A eller noget andet Kurvepunkt. Fra P vil der derfor højest udgaa 3 Tangenter, og det er en Selvfølge, at dette højeste Antal ogsaa virkelig kan naas.

Klassen for en Kurve af tredie Orden med et fremspringende Punkt af anden Art (en Snabel) er enten 5 eller 4. (2)

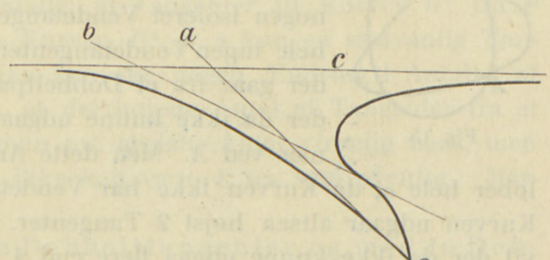

Fig. 14.

Afrundes paa den tidligere beskrevne Maade det fremspringende Punkt O, udledes af den givne Kurve G en fuldstændig kontinuert Kurve G^1, der overalt undtagen i umiddelbar Nærhed af O falder sammen med G. Kurven G^1 har ét og kun ét Infleksionspunkt i umiddelbar Nærhed af O og Afrundingen kan foretages paa den Maade, at Tangenten i dette bliver den ene a af de to Tangenter i O til G^1. Er de to andre Vendetangenter b og c (se Fig. 14), vil disse i Forbindelse med a bestemme en Trekant Δ, hvori G og G^1 ikke ligger. Er nu G^1 af sjette Klasse, vil der fra ethvert Punkt P af Δ (og kun fra disse Punkter) udgaa 6 Tangenter til Kurven; det, som det kommer an paa at vise, er, at den ene af disse maa være Nabolinie til den uegentlige Tangent PO til G. Lad os antage, at dette ikke er Tilfældet, saa at der fra P udgaar 6 egentlige Tangenter saavel til G som til G^1. Flytter P sig nu i Δ f. Eks. langs en ret Linie l, indtil det naar a, vil to og kun to af de Tangenter, der udgaar fra P til G^1 falde i a, og flytter P sig videre til P_1 langs l, dog ikke saameget, at Kurven eller nogen af de andre Vendetangenter overskrides, vil der gennem P_1 gaa 4 egentlige Tangenter til G^1 og altsaa ogsaa til G. Men ved at overskride a kan der af Tangenter fra P til G kun tabes én egentlig Tangent, og der skulde derefter udgaa 5 egentlige Tangenter fra P_1 til G, hvilket er i Modstrid med det forrige. Fra et Punkt af Δ kan der altsaa kun udgaa 5 egentlige Tangenter til G.

Ifald G^1 er af Klassen 4, maa G selvfølgelig være af samme Klasse. At Klassen nu virkelig kan være baade 5 og 4, ses let af en Figur, naar man erindrer, at der eksisterer fuldstændig kontinuerte Kurver af tredie Orden baade af sjette og af fjerde Klasse.

Klassen af en Kurve paavirkes selvfølgelig ikke af et fremspringende Punkt af tredie Art (en Top); Klassen er altsaa 6 eller 4. Hvis Kurven har et Dobbeltpunkt, er Klassen 4, hvadenten Kurven er fuldstændig kontinuert eller ikke.

Vi vil nu gaa over til Spørgsmaalet om Klassen af Kurver af fjerde Orden, dog med en væsentlig Indskrænkning. Med Undtagelse af Kurverne af tredie Type kan nemlig Kurven have et vilkaarligt Antal af hvad vi i det foregaaende har kaldt Infleksionspar. Den simpleste Typeform faar man ved helt at udelade Infleksionsparrene, og den derved bestemte vil vi kalde Typens Grundform. Nu er det vel ikke ugørligt ogsaa at sige noget om Klassen, selv om der kan findes Infleksionspar, men her vil vi alene holde os til Grundformerne. Har Kurven intet Dobbeltpunkt, er Grundformen af anden Orden og Klasse; Spørgsmaalet i den her stillede Form har altsaa kun Interesse for Kurver med Dobbeltpunkter.

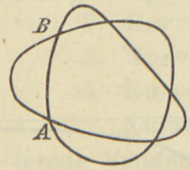

Fig. 15.

Lad os først betragte Kurven af anden Type, hvor der ikke fra et Dobbeltpunkt udgaar nogen Tangent og hvor der ikke findes nogen isoleret Vendetangent; paa Grundformen vil der altsaa i det hele ingen Vendetangenter findes. Fra et Punkt M af en Kurvebue σ, der gaar fra et Dobbeltpunkt A til det næste Dobbeltpunkt B, vil der da ikke kunne udgaa flere end to Tangenter[1]), naar M ligger nær ved A. Men dette Antal kan ikke forandres ved at M gennemløber hele σ, da Kurven ikke har Vendetangenter. Fra et vilkaarligt Punkt M af Kurven udgaar altsaa højst 2 Tangenter. Men fra et vilkaarligt Punkt P i Planen vil der da ikke kunne udgaa flere end 4, da man altid vil kunne komme fra P til et Kurvepunkt M uden undervejs at overskride Kurven. Man har altsaa i dette Tilfælde Klassen $k = 4$, og denne højere Grænse kan selvfølgelig naas: ɔ: Grund-
(3) formen for en Kurve af fjerde Orden og anden Type er af fjerde Klasse.

Lad os nu betragte Kurven af tredie Type; den er sammensat af Pseudo-

[1]) Foruden Tangenten i selve Punktet. Denne Tilføjelse vil ogsaa i det følgende hyppigt udelades, naar der ikke derved synes at kunne medføres Misforstaaelser.

grene[1]) af tredie Orden, og vi vil først tage Hensyn til det Tilfælde, hvor Kurven kun har to Dobbeltpunkter A og B. Lad de fire Buer, hvori Kurven deles af disse Punkter, være α, β, γ, δ, idet vi gennemløber Kurven i en aldeles bestemt Retning (sé Fig. 3). Enhver af disse Buer sammen med en af de tilstødende — f. Eks. $\alpha\beta$ og $\alpha\delta$ — vil da efter den tidligere Teori danne en Kurve af tredie Orden med et fremspringende Punkt. Dette kan i hvert af Punkterne A og B være enten af første, anden eller tredie Art. Lad os først antage, at ikke begge fremspringende Punkter er af anden Art. Det vil da være muligt at dele Kurven i to korresponderende Pseudogrene af tredie Orden, lad os sige $\alpha\beta$ og $\gamma\delta$, hvoraf den ene, $\alpha\beta$, har et fremspringende Punkt af første Art, den anden et af tredie Art. Fra et vilkaarligt Punkt i Planen kan der da ifølge (1) til $\alpha\beta$ højest udgaa 3, til $\gamma\delta$ højest 6 Tangenter, til den samlede Kurve altsaa paa den Maade højest 9. Men Antallet maa være lige, da Kurven har et lige Antal Vendetangenter (nemlig 4). Klassen kan derfor højest være 8. En Figur vil nu let vise, at Klassen kan være enten 8 eller 6; at den ikke kan synke til 4, ses ved at betragte Antallet af Tangenter fra et Punkt, der ligger nær ved et af Dobbeltpunkterne.

Lad os dernæst antage, at alle Pseudogrenene har et fremspringende Punkt af anden Art. Til to korresponderende Pseudogrene, f. Eks. $\alpha\beta$ og $\gamma\delta$, kunde der altsaa paa den Maade set tænkes at udgaa $5+5=10$ Tangenter. Men Antallet kan i Virkeligheden ikke blive saa stort. Lad os antage, at Pseudogrenen $(\alpha\beta)$ i et Snabelpunkt A har en Tangent a, der ved Afrundingen gaar over til en Vendetangent. Skal der fra et Punkt P i Planen udgaa 5 Tangenter til $(\alpha\beta)$, maa det ligge i en Trekant $\varDelta$ dannet af a og de to (andre) Vendetangenter til $(\alpha\beta)$. Flytter man nu Punktet P, der oprindelig tænkes at ligge i $\varDelta$, langs en Linie l hen i en ny Stilling P_1, saaledes at P under sin Bevægelse hverken har overskredet Kurven eller nogen fra a forskellig Vendetangent til $(\alpha\beta)$, medens a tænkes overskredet, vil der nu ifølge Beviset fra (2) fra P_1 udgaa 4 Tangenter til $(\alpha\beta)$. Fra det samme Punkt kan der endvidere til $(\gamma\delta)$ højest udgaa 5 Tangenter, til den samlede Kurve $G_4 = (\alpha\beta) + (\gamma\delta)$ altsaa højest 9 Tangenter. Men Antallet af Tangenter til Kurven G^4 fra P og P_1 maa være det samme, thi for hele Kurven G^4 er a kun en sædvanlig Tangent, saa at der ved at overskride den ikke kan ske nogen Ændring i Antallet af Tangenter fra et Punkt. Man ser herved, at det højeste Antal af Tangenter fra et Punkt til Kurven er 8. Af en Figur ser man nu, at dette Antal virkelig naas, men at Klassen dog ogsaa kan være 6; at den ikke kan være 4, ses som ovenfor. Man har altsaa:

En Kurve af fjerde Orden uden Dobbelttangenter og med to Dobbeltpunkter vil være af Klasse 8 eller 6. (4)

Af Kurver af tredie Type med 3 Dobbeltpunkter vil vi først tage den, hvor intet fremspringende Punkt paa en Pseudogren af ulige Orden ligger paa en af dennes Sløjfer. Lad C være det Dobbeltpunkt, der hører til Sløjfen, medens Kurven

[1]) Jeg vil nu bruge dette Udtryk, hvor jeg i „Indledning“ brugte Grene. To Pseudogrene, der tilsammen bestemmer hele Kurven, skal her kaldes korresponderende.

som før ved de to andre Dobbeltpunkter A og B deles i 4 paa hinanden følgende Buer α, β, γ og δ, og lad os antage, at C falder paa α (sé Fig. 2). Den Slutningsmaade, vi ovenfor anvendte for Kurver med to Dobbeltpunkter, synes atter at føre til 8 som den højere Grænse for Klassen. Men vi kan ad anden Vej udlede, at Klassen maa være 6; et saadant Bevis er det dog kun nødvendigt at føre i de Tilfælde, hvor alle fremspringende Punkter i A og B er Snabler.

Vi vil begynde med at finde Antallet af de Tangenter, der udgaar fra et Punkt M af selve Kurven; det er i den Anledning kun nødvendigt at finde Antallet, dels naar M falder i et Dobbeltpunkt, dels naar M falder i et Skæringspunkt mellem Kurven og en af dens Vendetangenter, thi kun i et af disse Punkter kan der ské Ændring i Antallet. Fra et af Punkterne A eller B udgaar der nu 2 Tangenter, der ikke berører i A eller B, og fra C udgaar ingen Tangent, der ikke berører i C. Vi maa dernæst undersøge Beliggenheden af de Punkter S_1 og S_2, hvori Kurven skæres af dens to Vendetangenter w_1 og w_2. Da $\alpha\beta$ og $\alpha\delta$ danner Kurver af tredie Orden med Dobbeltpunkt og med fremspringende Punkter af anden Art i (lad os sige) henholdsvis A og B, maa begge Kurvers Infleksionspunkter ligge paa γ, og da ligeledes $\gamma\beta$ og $\gamma\delta$ danner Kurver af tredie Orden, maa Skæringspunkterne S_1 og S_2 begge ligge paa α, og aabenbart ikke paa α's Sløjfe. Fra et Punkt M af Sløjfen kan nu ikke udgaa nogen Tangent t, thi da $\alpha\beta$ og $\alpha\delta$ danner Kurver af tredie Orden, maatte Røringspunktet ligge paa γ, og da $\gamma\beta$ og $\gamma\delta$ er Kurver af tredie Orden, maatte t skære baade β og δ; en saadan Tangent eksisterer altsaa ikke. Lad nu et Punkt M bevæge sig paa Kurven ud fra Sløjfen over C ind paa lad os sige Buen CA. Derved, at M overskrider C, gaar man over fra 0 til 2 Tangenter gennem M (foruden Tangenten i M). Ved at overskride et Punkt S_1 kan man faa 4 Tangenter, men ved eventuelt ogsaa at overskride S_2 (om dette er muligt, er det unødvendigt at undersøge) kan man ikke faa 6 Tangenter (foruden Tangenten i M), thi ved at gaa videre langs Buen til A skal man her ende med to Tangenter. Vi har altsaa sét, at der fra intet Punkt af Kurven kan udgaa flere end 6 Tangenter, idet Tangenten i selve Punktet regnes to Gange med. For nu at sé, hvormange Tangenter der kan udgaa fra et Punkt i Planen behøver man yderligere kun at sé, hvormange Tangenter der kan udgaa fra et Punkt af en Vendetangent, thi kun i Kurven og i en Vendetangent kan der ske Ændring i Antallet af Tangenter fra et bevægeligt Punkt. Men ved at flytte et Punkt P langs en Vendetangent w kan der kun ské Ændring i Antallet af Tangenter ved at overskride enten S_1 eller Skæringspunktet T mellem w_1 og w_2. Fra S_1 udgaar alt iberegnet paa sædvanlig Maade 6 Tangenter, og dette Antal kan ikke blive 8 ved at overskride T, da man skal ende med 4 Tangenter lige inden man atter naar S_1, ifald man, som vi forudsatte, paa den anden Side af S_1 havde 6. At der virkelig kan findes 6 Tangenter gennem et Punkt P, ses let ved at vælge P i Nærheden af et af Dobbeltpunkterne A eller B. Tillige følger det af det udviklede, at der ikke kan udgaa nogen Tangent fra et Punkt, der ligger indeni Sløjfen.

Ligger de to Dobbeltpunkter A og B paa en Pseudogrens Sløjfe, maa hvert af disse Punkter paa Sløjfen være fremspringende af tredie Art. Af de to korresponderende Pseudogrene, der hører til Dobbeltpunktet A, har den ene altsaa et fremspringende Punkt af første Art, den anden en Sløjfe. Det højeste Antal af Tangenter udgaaende fra et Punkt af Planen maa altsaa være det største lige Tal, der er mindre end $3+4=7$; Klassen er 6 (og som man straks ser, ikke 4). Fra et Punkt indeni Sløjfen kan der ikke udgaa nogen Tangent.

Vi har altsaa bevist:

E n K u r v e a f f j e r d e O r d e n u d e n D o b b e l t t a n g e n t e r o g m e d 3 D o b b e l t p u n k t e r e r a f K l a s s e n 6. (5)

Ved Kurverne af fjerde Type (uden Infleksionspar) maa vi skelne mellem dem, der har 2, og dem, der har 3 Sløjfer. Om de sidste har vi tidligere bevist, at der fra hvert Punkt M af en Sløjfe udgaar én og kun én Tangent til hver af de andre Sløjfer, og at der ingen andre Tangenter gaar gennem M foruden Tangenten i M. Overskrider nu M ved at bevæge sig paa Kurven et Dobbeltpunkt O for at gaa over paa den af tre elementære Buer dannede Restkurve, optræder 2 nye Kurvetangenter gennem M, da O paa Restkurven er fremspringende af første Art; dette Antal ændres ikke, inden M paany naar et Dobbeltpunkt.

Fra intet Punkt af Kurven udgaar altsaa flere end 4 Punkter (foruden Tangenten i selve Punktet). Da Kurven ikke har Vendetangenter, faar man altsaa:

G r u n d f o r m e n f o r e n K u r v e a f f j e r d e O r d e n m e d 3 S l ø j f e r e r a f K l a s s e n 6. (6)

Naar Kurven har to Sløjfer, vil vi først forudsætte, at den har flere end to Dobbeltpunkter. Der kan i saa Fald ikke paa nogen af Sløjferne, hverken de egentlige eller uegentlige, findes flere end et Infleksionspunkt I; den tilhørende Vendetangent maa skære Kurven i et Punkt S af den Sløjfe, hvorpaa I ligger, da en uegentlig Sløjfe for sig ogsaa er en kontinuert Kurve af fjerde Orden. Vi lader nu et Punkt M gennemløbe en Sløjfe — egentlig eller uegentlig — fra et Dobbeltpunkt A tilbage til A. Fra A udgaar to Tangenter (foruden Tangenterne i A), fra et nærliggende Punkt M paa en af de to Buer, der gaar gennem A, vil der da udgaa 4 Tangenter foruden Tangenten i M. Dette Antal kan kun forandres ved, at M overskrider S, men herved kan Antallet af Tangenter gennem M ikke vokse til 6 (foruden Tangenten i M), thi naar M næste Gang kommer i Nærheden af et Dobbeltpunkt — enten A eller det eventuelle andet Dobbeltpunkt paa Sløjfen — maa der paany ské Overgang mellem 4 og 2 Tangenter (Tangenten i M ikke medregnet). Fra intet Punkt M af Kurven kan altsaa udgaa flere end 4 Tangenter foruden Tangenten i M, og dette højeste Antal kan virkelig naas. Da Kurvens Grundform kun har to Vendetangenter, kan man dernæst sé her aldeles som ved Kurven af tredie Type med 2 Vendetangenter, at der heller ikke fra et Punkt P af en Vendetangent (og udenfor Kurven) kan udgaa flere end 6 Tangenter, naar selve Vendetangenten medregnes 2 Gange. Vi har altsaa bevist:

G r u n d f o r m e n f o r e n K u r v e a f f j e r d e O r d e n m e d 2 S l ø j f e r e r a f K l a s s e n 6, n a a r D o b b e l t p u n k t e r n e s A n t a l e r s t ø r r e e n d 2. (7)

Dette Resultat gælder ikke, naar Kurven har to Dobbeltpunkter eller kun ét. I saa Fald er der nemlig den Mulighed, at Kurvens to Infleksionspunkter kan ligge paa samme Sløjfe, der vil være uegentlig for Kurven med 2 og egentlig for Kurven med ét Dobbeltpunkt.

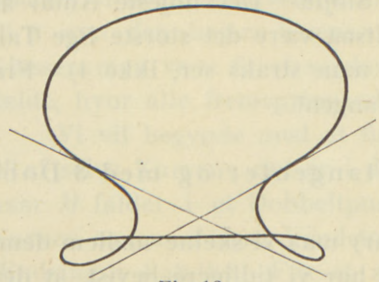

Fig. 16.

De ovenstaaende Slutninger viser i saa Fald kun, at Kurvens Klasse maa være 6 eller 8. At der nu findes baade Kurver af sjette og af ottende Klasse, kan ses af Eksempler. Man ser af Fig. 15, at Klassen vil afhænge af, om Skæringspunktet mellem Kurvens to isolerede Vendetangenter ligger indeni eller udenfor den Sløjfe, hvorpaa Infleksionspunkterne ligger.

§ 3.

Formen af Kurver af tredie og fjerde Klasse.

Kurver af en bestemt Klasse kan man direkte tegne som de reciprokke Polarfigurer til Kurverne af samme Orden — hvormed dog ikke skal være sagt, at det i mange Tilfælde ikke vil være nok saa simpelt at bruge dualistisk bestemte Metoder. Særlig for Kurverne af fjerde Klasse kan man næppe finde de i forrige § fremsatte Betragtninger over deres Orden overflødige som Kontrol.

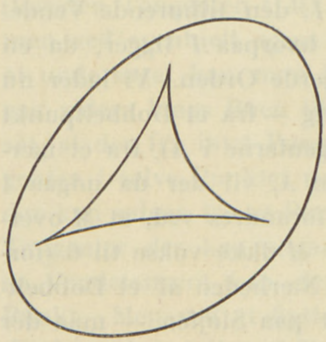

Fig. 17.

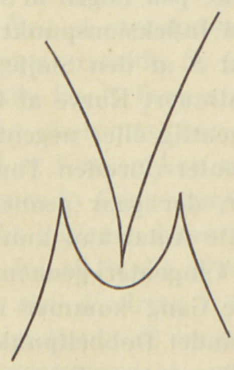

Fig. 18.

En Kurve af tredie Orden er sammensat af tre elementære Buer og har tre Vendepunkter. En Kurve af fjerde Klasse maa da ogsaa være sammensat af tre elementære Buer og have 3 Spidser. Der vil være to Hovedtyper, den ene af fjerde, den anden af sjette Orden.

De to Former for Klassekurver (sé Fig. 17 og 18) synes Øjet ret forskellige, da kun den førstnævnte kan projiceres saaledes, at den ligger helt i det endelige. Til den af fjerde Orden kan føjes en Oval, der helt omslutter den; til den af anden Art kan intet føjes.

Har Kurven af tredie Klasse en Dobbelttangent, bliver den efter det tidligere af fjerde Orden og har én Spids af første Art. Den maa derfor efter vor Enumeration være en Kurve af fjerde Orden og af anden Type; dens Form er tilstrækkelig angivet ved det tidligere.

En Kurve af tredie Klasse med en Vendetangent er tillige en Kurve af tredie Orden med en Spids, og omvendt.

Naar vi nu vil angive Formerne for Kurver af fjerde Klasse, drejer det sig som tidligere kun om en enkelt Gren af Kurven. Tillige vil jeg holde mig til *Grundformerne*. Ligesom man nemlig til enhver Kurve af fjerde Orden af Typerne I, II og IV kan føje passende valgte Infleksionspar i vilkaarligt Antal, kan man til en vilkaarlig Kurve af fjerde Klasse af de dualistisk tilsvarende Typer føje *Cuspidalpar* i vilkaarligt Antal. Ved Udeladelse af disse Cuspidalpar faar man Grundformerne. Kurven af fjerde Klasse uden Dobbelttangenter har til Grundform en Kurve af anden Orden (en mere almindelig Form ses i Fig. 19).

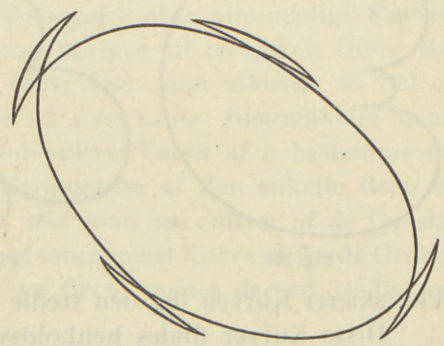

Fig. 19.

Vi vil nu i Almindelighed ved Kurver af fjerde Klasse og af Typerne II, III, IV forstaa de dualistisk tilsvarende til de Fjerdegradskurver, der har samme Typenummer. Grundformen for en G^4 af Typen II har vi nu tidligere bevist at være af fjerde Klasse. Da en Dobbelttangent til en G^4 ikke yderligere kan skære Kurven, har man altsaa:

Grundformen for en Kurve af fjerde Klasse af Typen II er identisk med Grundformen for Kurven af fjerde Orden med samme Typenummer. (1)

Kurven af fjerde Orden og Typen III er sammensat af to Pseudogrene af ulige Orden og har enten to eller tre Dobbeltpunkter. Vi tager først den af de tilsvarende Klassekurver, der har to Dobbelttangenter; den maa da efter det foregaaende have 4 Spidser og være enten af Ordenen 6 eller Ordenen 8; det er let at sammensætte dem af to Pseudogrene af tredie Klasse, og de findes angivne i typisk Form i Fig. 20 og Fig. 21. Det bemærkes, at det ved disse og de følgende Kurver af samme Type er let ved et Øjekast at sikkre sig, at Kurven virkelig er af fjerde Klasse. Da Kurven nemlig hverken har Vendetangenter eller Dobbeltpunkter, vil der fra to forskellige Punkter af Kurven altid udgaa det samme Antal af Tangenter. Kurvens Klasse er derfor nødvendigvis 4, naar der fra et vilkaarligt fast valgt ikke singulært Punkt M af Kurven udgaar to Tangenter, der ikke berører i M.

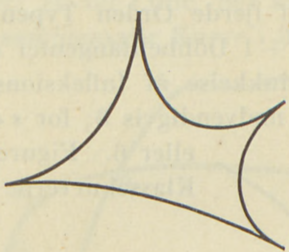

Fig. 20.

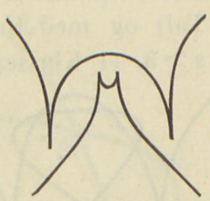

Fig. 21.

En Kurve af fjerde Orden tredie Type med 3 Dobbeltpunkter sammensættes af to Pseudogrene, hvoraf den ene har en Sløjfe. Fra et Punkt indeni denne kan der ikke udgaa nogen Tangent. Der vil altsaa ved den dualistisk tilsvarende Kurve findes rette Linier i dens Plan, der ikke skærer Kurven, og den vil derfor altid kunne tegnes i en saadan Projektion, at Kurven ligger helt i det endelige.

Der er to Arter af saadanne Fjerdegradskurver, eftersom Sløjfen ikke indeholder noget Dobbeltpunkt eller der ligger et Dobbeltpunkt paa en Sløjfe. Efter den tidligere Teori vil i det første Tilfælde kun ét af Kurvens Dobbeltpunkter være af første Art, medens i det andet to af Dobbeltpunkterne er af første Art. Ved de tilsvarende Klassekurver vil altsaa i det første Tilfælde den ene af Dobbelttangenterne ikke skære Kurven (og de to andre skære), medens i det andet Tilfælde to af Dobbelttangenterne ikke skærer Kurven (og den tredie skærer).

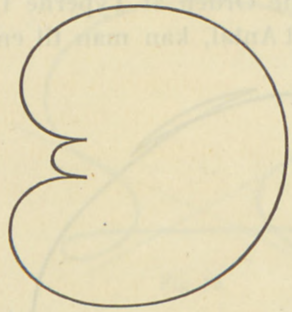
Fig. 22.

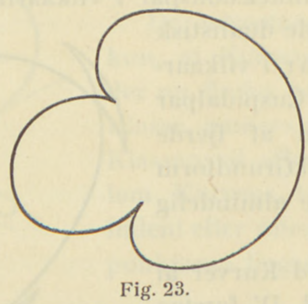
Fig. 23.

Disse Kurver findes henholdsvis i Fig. 22 og Fig. 23.

Af Kurver af fjerde Orden Typen IV var der to væsentlig forskellige Arter, eftersom Kurven havde tre eller kun to Sløjfer; den første har, naar man udelader Infleksionspar, ikke andre Særegenheder end tre Dobbeltpunkter og tre Dobbelttangenter. Den dualistisk tilsvarende Klassekurve er ifølge § 2 af sjette Orden og findes tegnet i en typisk Form Fig. 24.

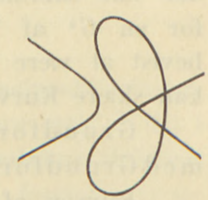
Fig. 24.

En Kurve af fjerde Orden Typen IV med to Sløjfer har s Dobbeltpunkter, $s+1$ Dobbelttangenter (hvor s kan være et vilkaarligt positivt helt Tal) og med Udelukkelse af Infleksionspar to isolerede Infleksionspunkter. Naar $s \geqq 3$, er Klassen nødvendigvis 6; for $s < 3$ har vi kun vist, at Klassen kan være 8 eller 6. Figurerne 25, 26 og 27 viser typiske Former for Klassekurverne svarende til $s = 4$, 1 og 2. Den fuldt optrukne Figur i Fig. 27 er af ottende Orden, men ombyttes den endelige Bue ab med den punkterede Bue, bliver ogsaa den ligesom de øvrige Kurver af sjette Orden.

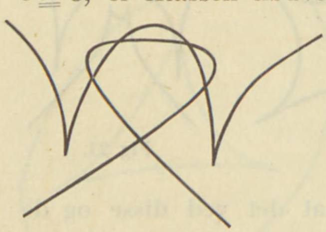
Fig. 25.

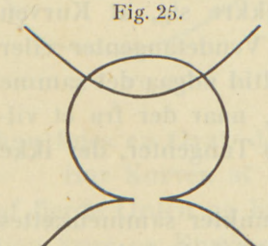
Fig. 26.

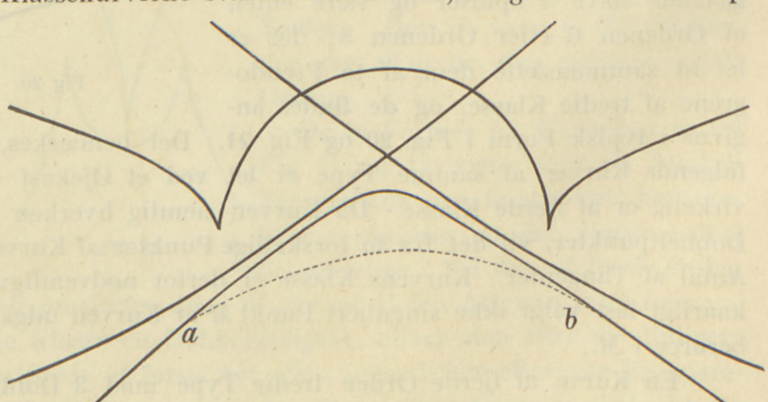

Fig. 27.

§ 4.

Sammensatte Kurver af fjerde Orden. Spredte Bemærkninger.

Ved Undersøgelser over Udseendet af algebraiske Kurver af fjerde Orden[1]) kommer det i høj Grad an paa at bestemme Antallet af forskellige Grene og disses indbyrdes Beliggenhed. Ved den tilsvarende Undersøgelse over almindelige Kurver af fjerde Orden maa derimod Vægten lægges paa Formen af en enkelt Gren, thi Antallet af Grene er i og for sig ubegrænset. Dette kan man allerede se ved at vælge n Punkter i Planen, hvoraf ikke tre ligger ud i ret Linie; tilstrækkelig smaa Ovaler omgivende disse Punkter vil aabenbart for enhver Værdi af n bestemme en sammensat Kurve af fjerde Orden. Efter at Bestemmelsen af den enkelte Gren er gjort færdig, kan man dog komme noget videre, idet man om enhver af de typiske Former kan spørge, om den kan være en Gren af en sammensat Kurve af fjerde Orden.

Naar der i de følgende Sætninger tales om en Gren, menes derved stadigt en Gren af fjerde Orden.

En Gren med mindst ét Dobbeltpunkt af første Art samt en Gren med 3 Dobbeltpunkter og 3 Sløjfer vil hver for sig danne en fuldstændig Kurve af fjerde Orden, d. v. s. til en af disse Former kan ingen ny Gren føjes, uden at den sammensatte Kurves Orden bliver større end 4. (1)

For at vise, at der til en forelagt Gren G ikke kan føjes nogen ny Gren, er det tilstrækkeligt at paavise et Punkt P af den Beskaffenhed, at enhver ret Linie, der gaar gennem P, skærer G i 4 Punkter; en ret Linie, der forbinder P med et Punkt af en ny Gren, vil nemlig skære den sammensatte Kurve i flere end 4 Punkter.

Et saadant Punkt P kan man nu let finde i det førstnævnte af de to Tilfælde. Fra et Dobbeltpunkt O af første Art udgaar nemlig ingen Tangent, der berører udenfor O; derfor maa enhver gennem O gaaende ret Linie skære i 2 Punkter foruden i O (er Linien en Tangent i O, falder dog endnu et Skæringspunkt i O). Punktet P bliver nu et Punkt, der ligger tilstrækkelig nær ved O og paa den negative Side af de to gennem O gaaende Kurvegrene. Punktet ligger tilstrækkelig nær ved O, naar man kan komme fra O til P uden at overskride hverken Kurven eller nogen Vendetangent til denne.

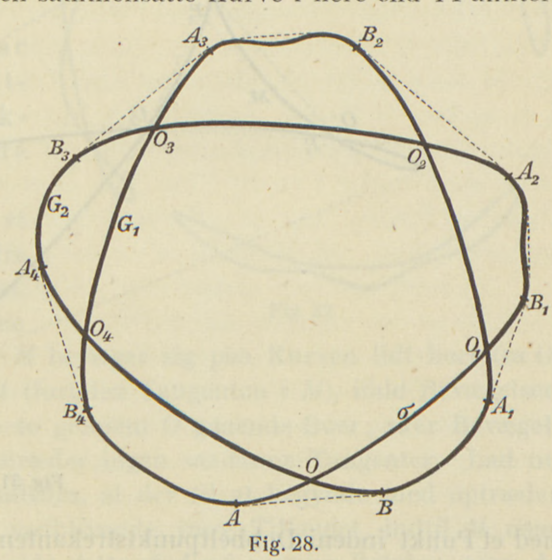

Fig. 28.

Det er let at sé, hvilke af Formerne, der kan have et Dobbeltpunkt af første Art. En saadan maa enten have alle sine Dobbeltpunkter af første Art, — og altsaa

[1]) Sé særlig Zeuthen: Sur les différentes formes des courbes planes du quatr. ordre, Math. Ann. Bd. VII p. 410.

tilhøre anden Hovedtype — eller ogsaa maa den have 3 Dobbeltpunkter og ingen Dobbelttangenter (sé Fig. 29 og Fig. 30).

Ved den anden af de i (1) nævnte Kurver kan man ikke finde et Punkt P af den nævnte Beskaffenhed. Lad de 3 Dobbeltpunkter være A, B, C; til hver af disse

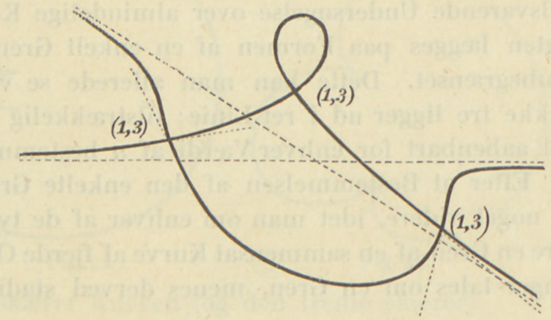

Fig. 29.

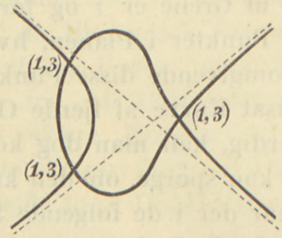

Fig. 30.

hører en Sløjfe og de forbindes parvis ved elementære Buer. Vi kan nu altid tænke os — i hvert Fald kan det opnaas ved en Omprojektion — at Kurven ligger helt i det endelige. Det er da let at sé, at en ret Linie, der forbinder et Dobbeltpunkt

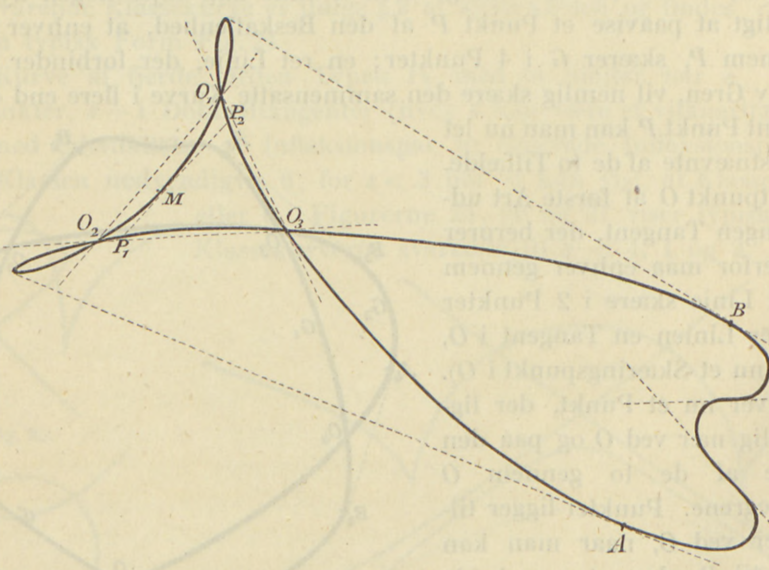

Fig. 31.

med et Punkt indeni Dobbeltpunktstrekanten $O_1\,O_2\,O_3$ vil skære i 4 Punkter, hvoraf 2 falder i et Dobbeltpunkt. Men af de tre Forbindelseslinier mellem et Punkt M af en eventuel ny Gren og de 3 Dobbeltpunkter maa nødvendigvis mindst én indeholde Punkter af Dobbeltpunktstrekanten; en saadan ret Linie vilde derfor skære den samlede Kurve i flere end 4 Punkter. Endvidere har man:

Til en Gren uden Dobbelttangenter og med 2 Dobbeltpunkter kan man højest føje én Gren og denne maa være af anden Orden. (2)

Den sidste Del af Sætningen følger af, at enhver ret Linie i Planen skærer den førstnævnte Gren i mindst to Punkter; at der nu findes et Punkt Q, og altsaa et Gebet af Punkter omgivende Q, af den Beskaffenhed, at enhver derigennem gaaende ret Linie højest skærer Kurven i 2 Punkter, maa ses af et Eksempel (sé Fig. 3 der let ændres saaledes, at alle Vendetangenter bliver adskilte). Det omtalte Gebet vil begrænses af Kurvens 4 Vendetangenter.

Vi mangler endnu at tage Hensyn til Kurverne af første og af fjerde Type. Her har man:

En Kurve af fjerde Orden kan være sammensat af et vilkaarligt Antal af Grene, saafremt disse enten ikke har Dobbeltpunkter eller kun Dobbeltpunkter af anden Art; det er ikke nødvendigt, at alle Grenene indbyrdes hører til samme Type. (3)

Det er tilstrækkeligt at konstruere to Ovaler, der skærer hinanden lad os sige i 12 Punkter (at dette er muligt, er let at vise). Her kan man eksempelvis — jfr. Fig. 32 — let danne sammensatte Kurver ved passende Afrunding af Grenene.

Det kan endnu bemærkes, at det er muligt i visse simple Tilfælde at paavise, at en Kurve er af fjerde Orden, naar dens Singulariteter er begrænsede paa passende Maade. Vi vil nøjes med at bevise den allersimpleste af disse Sætninger:

En lukket Kurve, der ikke har andre Singulariteter end Dobbelttangenter og lutter Dobbeltpunkter af første Art maa være af fjerde Orden og Klasse. (4)

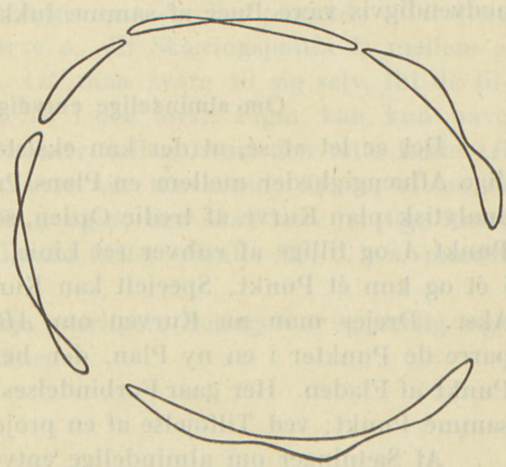

Fig. 32.

Et Dobbeltpunkt af første Art er et saadant, hvorigennem der ikke gaar andre Tangenter end de, der berører i Punktet. Bevæger nu et Punkt M sig paa Kurven ud fra et Dobbeltpunkt O, vil der, naar M bevæger sig paa Kurven lidt bort fra O, optræde to Tangenter gaaende gennem M (foruden Tangenten i M), ifald Bevægelsen sker til en bestemt Side paa hver af de to gennem O gaaende Buer; sker Bevægelsen derimod i den modsatte Retning, optræder ingen saadanne Tangenter. Lad nu M bevæge sig ud fra O langs en Bue saaledes, at der til at begynde med optræder 2 nye Tangenter gennem M. Dette vil vedblivende være Tilfældet, indtil M naar et nyt Dobbeltpunkt O_1. Ved at overskride dette stadig i samme Retning maa de to ny Tangenter gennem M atter forsvinde, thi ellers vilde der gennem Kurvepunktet M, der ligger i vilkaarlig Nærhed af et Dobbeltpunkt, kunne gaa 4 Tangenter foruden Tangenten i M, i Modstrid med det ovennævnte. Man ser paa den

Maade, at der gennem et vilkaarligt Kurvepunkt M højest gaar 2 Tangenter foruden Tangenten i M. Da nu Kurven ikke har Vendetangenter kan man komme fra et vilkaarligt Punkt i Planen til et Punkt i vilkaarlig Nærhed af Kurven uden derved hverken at vinde eller at tabe nogen gennem Punktet gaaende Tangent; deraf følger straks, at Kurven maa være af fjerde Klasse. Da nu alle Kurver af fjerde Klasse undtagen de, der er af fjerde Orden, nødvendigvis har mindst 2 Spidser, er Sætningen bevist.

Vi har i det foregaaende alene talt om lukkede Kurver af fjerde Orden. Hvad
(5) aabne Buer angaar, kan man let sé, at en enkelt aaben Bue af fjerde Orden maa være en Del af en lukket Kurve af samme Orden.

Lad Buens Endepunkter være A og B og lad en ret Linie l i Planen, der skærer Buen i 4 Punkter, skære Forbindelseslinien AB i et Punkt C. Den givne Bue i Forbindelse med det Liniestykke AB, der ikke indeholder C, maa da være en lukket Kurve af fjerde Orden (selv om den ikke ubetinget er fuldstændig kontinuert). Den lukkede Kurves Orden maa nemlig enten være 4 eller 5, og da l skærer den i 4 Punkter, maa Ordenen være 4.

Derimod vil flere aabne Buer, der tilsammen er af fjerde Orden, ikke alle nødvendigvis være Buer af samme lukkede Kurve af fjerde Orden.

§ 5.

Om almindelige entydige Afhængigheder i Planen.

Det er let at sé, at der kan eksistere ikke-analytiske og overalt gensidig entydige Afhængigheder mellem en Plans Punkter. Man kan f. Eks. bestemme en ikke-analytisk plan Kurve af tredie Orden, som af enhver ret Linie, der gaar gennem et Punkt A og tillige af enhver ret Linie, der gaar gennem et andet Punkt B, skæres i ét og kun ét Punkt. Specielt kan Kurven vælges symmetrisk om Linien AB som Akse. Drejer man nu Kurven om AB, dannes en Flade, og man kan sammenparre de Punkter i en ny Plan, der henholdsvis fra A og fra B projicerer samme Punkt af Fladen. Her gaar Forbindelseslinierne mellem tilsvarende Punkter gennem samme Punkt; ved Tilføjelse af en projektiv Transformation kan dette let undgaas.

Af Sætninger om almindelige entydige og kontinuerlige Punktafhængigheder i en Plan er den vigtigste sikkert den, der først er fremsat af A. SCHOENFLIES om den éntydige Afhængighed i et endeligt Omraade[1]).

Her skal kun tilføjes nogle nærliggende Sætninger om kontinuerlige og gensidigt entydige Afhængigheder mellem Punkter af en hel projektiv Plan, hvor de uendelig fjerne Punkter altsaa antages at ligge paa en ret Linie.

(1) Tilsvarende Kurver maa enten begge være af lige eller begge af ulige Orden.

Lad γ_1 og γ_2 være to Kurver i den ene Figur, γ_1' og γ_2' disses tilsvarende. Til et Skæringspunkt mellem γ_1 og γ_2 svarer et Skæringspunkt mellem γ_1' og γ_2'; naar γ_1 og γ_2 berører hinanden, maa ogsaa γ_1' og γ_2' berøre hinanden i det til-

[1]) Sé, Schoenflies: Über einen Satz der Analysis situs. Gött. Nachr. 1899.

svarende Punkt. Naar nu γ_1 og γ_2 begge er af ulige Orden, maa de skære hinanden i et ulige Antal Punkter, men da maa γ_1' og γ_2' ogsaa have et ulige Antal Punkter fælles, d. v. s. de sidstnævnte maa begge være af ulige Orden.

Ved den kontinuerlige og gensidigt entydige Afhængighed mellem en projektiv Plans Punkter, maa der nødvendigvis findes mindst ét Punkt, der svarer til sig selv. (2)

Beviset er i alt væsentligt analogt med Chasles' bekendte Konstruktion af en Projektivitets Dobbeltpunkter.

Lad A og A_1 være to tilsvarende Punkter. Til rette Linier l gaaende gennem A svarer Kurver l_1 gennem A_1, og alle disse er af ulige Orden. Det geometriske Sted for Skæringspunkter mellem tilsvarende Linier l og l_1 vil derfor være en altid eksisterende sammensat eller usammensat lukket Kurve φ. Den gaar gennem A_1, da der ogsaa til Linien AA_1 maa svare en Kurve l_1, men den gaar ogsaa gennem A. Opfattes nemlig A som et Punkt af den anden Figur, vil dertil svare et Punkt A^{-1} i den første, og den til den rette Linie AA^{-1} svarende Kurve l_1 vil gaa gennem A. Man ser nu, at φ maa være af lige Orden, thi enhver ret Linie gennem A skærer den foruden i A endnu i et ulige Antal Punkter. Lad yderligere B og B_1 være et nyt Par tilsvarende Punkter, hvoraf intet ligger paa φ, eller paa AA_1. Til disse vil der paa tilsvarende Maaade svare en Kurve ψ. Et Skæringspunkt D mellem φ og ψ, der ikke ligger paa Forbindelseslinien AB, maa svare til sig selv, thi de tilsvarende Kurver til de rette Linier AD og BD i den første Figur kan kun have ét Punkt fælles. Men φ og ψ vil have de Punkter fælles, hvori den rette Linie AB opfattet som en Linie i den første Figur skærer sin tilsvarende Kurve, altsaa et ulige Antal og mindst ét beliggende paa AB, φ og ψ, der skal have et lige Antal Punkter fælles, maa derfor mindst have ét Punkt fælles udenfor AB, d. v. s. mindst ét Punkt maa svare til sig selv.

Vil man komme videre, maa man tilføje yderligere Betingelser og særlig tage Hensyn til tilsvarende Omløbsretninger i Planen.

§ 6.

Rumkurver af tredie Orden.

Ved en Rumkurve af n-te Orden vil vi forstaa en Kurve, der fra et vilkaarligt Punkt P i Rummet, der ikke ligger paa selve Kurven, ind paa en Plan, der ikke gaar gennem P, projiceres i en sammensat eller usammensat plan Kurve af højest n-te Orden en Grænse, der skal kunne naas. En saadan Kurve R^n kan altsaa af en Plan højest skære i n Punkter med mindre Planen da har uendelig mange kontinuert paa hinanden følgende Punkter fælles med Kurvene; det sidste svarer til, at Projektionen enten er en ret Linie eller indeholder en ret Linie som en Del. I Overensstemmelse med vor Definition kan en R^n bestaa af en eller flere Dele, Grene. Men om hver enkelt Gren vil vi forudsætte, at den er kontinuert og i almindelig projektiv Forstand lukket.

En Kurve af tredie Orden, en R^3, projiceres altsaa fra ethvert Punkt P, der ikke ligger paa Kurven, (og ind paa en Plan, der ikke gaar gennem P — en Tilføjelse, vi i det følgende vil udelade), som en plan Kurve af tredie Orden, en G^3.

(1) En Rumkurve af tredie Orden, der ikke specielt er en enkelt plan Kurve, projiceres fra hvert af sine Punkter som en Kurve af anden Orden.

En Plan gennem Projektionscentret P vil nemlig udenfor P kun kunne have højest to Punkter fælles med Kurven. Denne Projektion kan eventuelt være sammensat af to rette Linier, men den kan ikke være dannet af en eller eventuelt flere elementære Buer AB, CD.

Da nemlig i hvert Fald enhver Gren af R^3 skal være lukket og kontinuert, saa at ogsaa Buen AB for sig maa være Projektion af en lukket Gren, maatte et vilkaarligt Punkt af AB være Projektion af mindst to Punkter af R^3; en Plan gennem P og to Punkter af Buen vilde altsaa skære i mindst 5 Punkter.

Naar en R^3 er sammensat, maa i det mindste en af dens Grene være en ret Linie. Lad nemlig R^3 være sammensat af Grenene α, β..., hvor vi vil gaa ud fra, at α ikke er en ret Linie. Projicerer man R^3 fra et Punkt af α, maa Projektionen ifølge det nysnævnte være sammensat af to rette Linier; da dette gælder for hvert paa α liggende Projektionscentrum, maa β være en ret Linie. Restkurven, der skal føjes til den rette Linie, maa være af anden Orden. Man har altsaa:

(2) En Rumkurve af tredie Orden, der har flere Grene, maa enten være sammensat af en ret Linie og en plan Kurve af anden Orden eller af tre rette Linier.

Vi vil nu i det følgende alene holde os til den usammensatte Kurve af tredie Orden, der tillige skal forudsættes ikke at være plan; endvidere vil vi forudsætte, at Kurven er fuldstændig kontinuert, hvilket skal betyde, at enhver af dens Projektioner har denne Egenskab.

En Tangent i et Punkt M af en Rumkurve defineres (hvor den eksisterer) som Grænsestillingen for Forbindelseslinien mellem to Punkter M' og M'', der begge langs Kurven konvergerer med M; det ene af Punkterne M' og M'' kan naturligvis ogsaa tænkes at ligge fast i M. Af vore Forudsætninger følger da, at de af os betragtede R^3 i hvert Punkt M har en Tangent m. En gennem m gaaende Plan kan udenfor M højest skære Kurven R^3 i ét Punkt. Ved en Oskulationsplan i et Punkt M forstaar man Grænsestillingen (hvor en saadan eksisterer) for en Plan gennem M og to Punkter M' og M'', der begge langs Kurven konvergerer med M; specielt kan man ogsaa lade M' ligge fast i M og samtidig erstatte Linien MM' med Tangenten i M. Man kan ogsaa lade $M'M''$ følges ad og samtidig erstatte Linien $M'M''$ med Tangenten i M'. Af Forudsætningen om de af os betragtede Kurver anvendt paa Projektionen ud fra M følger, at vor R^3 i ethvert Punkt har en Oskulationsplan; denne kan ikke have noget Punkt udenfor M fælles med Kurven.

Naar M er Øjepunkt, m Tangent, μ Oskulationsplan i M, og man projicerer Kurven fra M paa en Plan π, vil Sporet m_1 af μ være Tangent til Kurvens Projektion i Sporet M_1 af m[1]). Da Kurvens Projektion er af anden Orden, maa M_1 være et sædvanligt Kurvepunkt. Drejer man altsaa Oskulationsplanen μ en lille Vinkel om Tangenten m ind i en Stilling μ', vil denne skære Kurven i ét Punkt, der vil konvergere med M, naar μ' konvergerer med μ. Drejer man μ om en Linie, der gaar gennem M men er forskellig fra Tangenten, vil den nye Stilling μ', naar Drejningen er sket til en af Siderne, ikke skære Kurven i Nærheden af M, men, naar Drejningen er sket til den anden Side, skære Kurven i to Punkter, der konvergerer med M, naar μ' konvergerer med μ.

Lad os nu projicere R^3 fra et Punkt P udenfor Kurven. Hvis Oskulationsplanen μ i et Punkt M — men ikke m — gaar gennem P, maa ifølge det nysnævnte Projektionen af M enten være en Spids af anden Art eller et Infleksionspunkt paa Projektionen (sé Grafiske Kurver Side 20). Men Projektionen maa nødvendigvis her være et Infleksionspunkt, da en G^3 ikke kan have nogen Spids af anden Art.

Lad os dernæst projicere fra et Punkt P, der ligger udenfor Kurven men paa en Tangent m til denne. Sporet M_1 af m maa da blive en Spids af første Art; M_1 ligger nemlig paa Kurven, er ikke Skæringspunkt mellem to Kurvegrene og ingen gennem M_1 gaaende ret Linie kan skære Kurven i flere end ét Punkt udenfor M_1. Sporet af Oskulationsplanen i M maa være Spidstangent, da dette Spor ikke kan have noget Punkt udenfor M_1 fælles med Projektionen. Vi har altsaa bevist: Projektionen af en Rumkurve af tredie Orden fra et Punkt udenfor Kurven faar en Spids, naar en Tangent gaar gennem Øjet, og et Infleksionspunkt, naar en Oskulationsplan, men ikke den tilhørende Tangent, gaar gennem Øjet. (3)

Ved en Rumkurves Klasse n' vil vi forstaa det højeste Antal af Oskulationsplaner, der kan gaa gennem et og samme Punkt, og ved dens Rang r det højeste Antal af Tangenter, der kan skære en og samme rette Linie. Da en plan Kurve af tredie Orden højest kan have 3 Vendetangenter, maa Klassen af R^3 være 3 eller 1; vi skal snart sé, at den er 3. Klassen for en plan Kurve af tredie Orden er 6 eller 4; men man kan let sé, at Rangen maa være 4, saa at Projektionen af en R^3, selv om den ikke har noget Dobbeltpunkt, dog ikke kan være en aldeles vilkaarlig G^3. Lad nemlig en ret Linie l skære en Tangent t i et Punkt P. Projicerer man Kurven fra P, faar man en plan G^3 med en Spids. Dennes Klasse er 3, og der vil derfor foruden t højest være 3 andre Kurvetangenter, der skærer l; omvendt ses det, at man altid gennem P kan drage en ret Linie, der virkelig skærer 3 andre Kurvetangenter. Man har altsaa:

Rangen af en Rumkurve af tredie Orden er 4. (4)

Tangenterne til en Rumkurve danner, hvad man kalder Kurvens Tangentflade (Kurvens udfoldelige Flade). Kurven kaldes Fladens Spidskant. Ved en Flades Orden forstaar vi det højeste Antal af Skæringspunkter med en ret Linie. Da nu Ordenen af Tangentfladen til en Rumkurve aabenbart er lig denne Kurves Rang, vil Tangentfladen til en R^3 være af fjerde Orden. Den skæres altsaa af en

[1]) Denne Egenskab kunde ogsaa være brugt til Definition af Oskulationsplanen.

Plan i en Kurve af fjerde Orden, der efter vore Forudsætninger om R^3 bliver kontinuert og lukket.

(5) Oskulationsplanen μ i et vilkaarligt Punkt M af Spidskanten berører Kurvens Tangentflade langs Tangenten m i samme Punkt.

Ved dette forstaar vi, at en vilkaarlig Snitsplan π, der ikke gaar gennem m, vil skære m og μ i et Punkt M_1 med tilhørende Tangent m_1 af den Kurve σ_1, hvori π skærer den udfoldelige Flade.

Projicerer man nemlig R^3 fra M_1 ind paa en Plan, vil ifølge (3) Projektionen af m_1 blive et Punkt af Projektionens Spidstangent; m_1 vil altsaa skære 2 eller 0 Tangenter til R^3, d. e. m_1 vil udenfor M_1 skære σ_1 i 2 eller 0 Punkter. Drager man yderligere i π gennem M_1 en vilkaarlig ret Linie m_1', der er nærliggende til m_1, vil denne ved samme Projektion som før projiceres i et Punkt, der er nærliggende ved Spidstangenten i R^3s Projektion. m_1' vil derfor skære én Tangent til R^3, der er nærliggende ved m og desuden 2 eller 0 andre Tangenter. Den rette Linie m_1' vil altsaa ogsaa foruden i M_1 skære σ_1 i et Punkt, der er nærliggende til M_1 og desuden i 2 eller 0 andre Punkter. Af disse Omstændigheder følger, at m_1 er Tangent til σ_1 i Punktet M_1.

Vi ser nu, at Rumkurvens Klasse tillige maa være Klassen for et vilkaarligt plant Snit i Kurvens udfoldelige Flade; da Klassen for en plan Kurve ikke kan være 1, har man altsaa:

(6) Klassen for en Rumkurve af tredie Orden er lig 3.

Naar et Punkt P bevæger sig i Rummet, ser vi tillige, at der vil tabes eller vindes to gennem P gaaende Oskulationsplaner til Kurven ved at overskride dennes udfoldelige Flade — hvilket ganske direkte følger af det ovenstaaende, naar Bevægelsen i det Øjeblik, Overskæringen sker, er plan. Et Punkt i Nærheden af Tangentfladen, gennem hvilket gaar to Tangentplaner til Fladen, skal siges at ligge paa dennes positive Side.

Efter Læren om den plane G^3 maa der samtidig vindes eller tabes et Dobbeltpunkt i Kurvens Projektion. Et saadant Punkt maa hidrøre fra en gennem P gaaende Dobbeltsekant til Kurven. Man har altsaa:

(7) Det højeste Antal af Dobbeltsekanter til en R^3 er lig 1 (hvilket kan ses straks).

(8) Naar et Punkt ved sin Bevægelse i Rummet overskrider Kurvens Tangentflade, vil der tabes eller vindes to gennem Punktet gaaende Oskulationsplaner og samtidig henholdsvis vindes eller tabes en gennem Punktet gaaende Dobbeltsekant til Kurven.

Vi vil nu lidt nøjere betragte Skæringskurven σ mellem en Plan og den udfoldelige Flade til en R^3 og bevise:

(9) Skæringskurven mellem en Plan og den udfoldelige Flade til en R^3 faar en Spids i et Skæringspunkt med Kurven, naar Tangenten i et saadant Punkt ikke ligger i Snitplanen. Finder dette Sted, uden

at dog Snitplanen er Oskulationsplan, faar Snitkurven der et Infleksionspunkt.

Lad os først antage, at Snitplanen π har fælles med R^3 et Punkt M, hvis Tangent m ikke ligger i π. Projicerer man som før R^3 fra M ind paa en Plan, bliver Projektionen en Kurve af anden Orden, der berører Sporet af M's Oskulationsplan μ. Deraf følger, at Skæringslinien m_1 mellem π og μ vil skære én og kun én Kurvetangent, der er forskellig fra m, d. v. s., at Linien m_1 udenfor M skærer σ i ét og kun ét Punkt. En ret Linie, der gaar gennem M, ligger i π og er nærliggende til m_1, ses paa samme Maade at skære σ i ét og kun ét Punkt, der er nærliggende til M, foruden i et andet, der ligger i endelig Afstand fra M. Da σ er af fjerde Orden, maa M derfor være en Spids med m_1 til Tangent.

Lad os dernæst antage, at Snitplanen π indeholder Tangenten m i M — uden dog at være Oskulationsplan i dette Punkt. Skæringslinien mellem den udfoldelige Flade og π vil da indeholde m som en Del, og Restkurven σ maa være af tredie Orden; den kan nemlig ikke være af anden Orden, da σ maa faa en Spids i det fra M forskellige Skæringspunkt mellem μ og Kurven. Punktet M maa være et Infleksionspunkt med m til Tangent, da man ved samme Projektion som ovenfor ser, at m ikke kan skære σ i noget Punkt udenfor M, medens en Nabolinie til m, gaaende gennem M og liggende i π, vil skære σ i 2 eller 0 Punkter.

Lad os nu endelig betragte en Oskulationsplan μ som Snitplan. Her vil atter Tangenten m skille sig ud, men Restkurven bliver kun af anden Orden. Ved Projektion af R^3 fra (lm) ser man nemlig, at en vilkaarlig ret Linie l i μ vil skære σ i 2 eller 0 Punkter. Man har altsaa:

Sporene af alle Oskulationsplanerne til en Rumkurve af tredie Orden i en fast af disse Planer er Tangenter til en Kurve af anden Orden. (10)

Da man af en Kurve af anden Orden højst kan vælge 5 Punkter vilkaarligt (sé „Indledning" 1, Side 14), har man her:

Af en Rumkurve af tredie Orden kan man ikke vælge flere end 6 Punkter — eller 6 Oskulationsplaner — aldeles vilkaarligt. (11)

Ligeledes har man:

Kender man til en Rumkurve af tredie Orden to Dobbeltsekanter, kan man ikke vælge flere end 3 Kurvepunkter aldeles vilkaarligt. (12)

§ 7.

Almindelige Sætninger om Rumkurver.

I den plane Geometri tænkte vi os de betragtede Kurver sammensatte af elementære Buer, d. v. s. Buer af Kurver af anden Orden. Ogsaa de Rumkurver, vi her vil behandle, tænker vi os sammensatte af elementære Buer, der her imidlertid maa være Buer af Kurver af tredie Orden. Lad Kurven være sammensat af Buerne $AB, BC, CD \dots$ Ethvert Kurvepunkt, der ikke er $A, B, C \dots$, skal kaldes et indre Punkt paa en elementær Bue. De to paa hinanden følgende elementære Buer, der har et Endepunkt fælles, skal i dette antages at have samme Tangent og samme Oskulationsplan. Det er da klart, at Kurven ogsaa efter den tidligere givne Definition maa være fuldstændig kontinuert. Ligeledes følger det af Overenskomsten, at Sporet af Kurvens Tangentflade i en vilkaarlig Plan maa være fuldstændig kontinuert. Vi vil endnu minde om den tidligere nævnte Vedtagelse, nemlig den, at alle Kurver skal være lukkede i projektiv Forstand.

Vi vil nu først i al Korthed fremsætte de vel kendte Paritetssætninger. I disse Sætninger regnes visse Punkter og Tangenter med en vis Multiplicitet; hvilken denne er, følger i det Hele og store af selve Beviserne i Forbindelse med de sædvanlige desangaaende Vedtægter for plane Kurver.

(1) Antallene af Skæringspunkter mellem en Rumkurve og to vilkaarlige Planer har samme Paritet.

Dette ses umiddelbart af den tilsvarende plangeometriske Sætning ved at projicere Kurven fra et Punkt af de to Planers Skæringslinie.

(2) Antallene af de Kurvetangenter, der skærer to rette Linier i Rummet, har samme Paritet.

Naar de to rette Linier har et Punkt P fælles, følger Sætningen straks af en tilsvarende Sætning i Planen ved at projicere Kurven fra P. Det almindelige Tilfælde føres tilbage til det nævnte ved at lægge en tredie ret Linie, der skærer begge de givne.

(3) Antallene af de Oskulationsplaner til en Rumkurve, der gaar gennem to Punkter, har samme Paritet.

Dette ses ved at betragte Sporet af Kurvens Tangentflade i en Plan, der indeholder de to Punkter.

Projiceres Kurven R fra et indre Punkt P af en elementær Bue ind paa en Plan π, i en Kurve R_1, vil de ved P nærliggende Dele af R afbildes som en plan elementær Bue. Afvigelser herfra kan kun fremkomme, naar det paa Kurven antagne Projektionscentrum falder i et fælles Endepunkt A for to forskellige elementære Buer. Her er der de Muligheder, at R_1 i Sporet A_1 af Tangenten a i A faar en Spids af første eller anden Art, eller et Infleksionspunkt. Den førstnævnte Dobbeltmulighed vil vi nu ikke — med mindre andet udtrykkelig siges — tage Hensyn til ved de Kurver, vi betragter. I de udelukkede Tilfælde vil enhver ret Linie l_1 i π, der konvergerer mod at gaa gennem A_1, skære R_1 i to Punkter, der konvergerer mod A_1; en vilkaarlig Plan gennem A, der konvergerer mod at gaa gennem a, vil altsaa foruden i A skære Kurven i 2 andre Punkter, der konvergerer mod A; der er da nogen Grund til at betragte dette Tilfælde som mere specielt og det hvadenten A paa R er en Spids eller a er Grænsestilling for en tredobbelt Sekant, ɔ: en Linie, der skærer R i tre sammenfaldende Punkter.

Vi vil nu definere:

(4) Ved et Hyperoskulationspunkt A vil vi forstaa et saadant Punkt

af en Rumkurve, at dennes Projektion fra A ind paa en Plan faar et Infleksionspunkt i Sporet af Tangenten a i A.

Oskulationsplanen α i A kaldes en hyperoskulerende eller stationær Plan. Det er aabenbart, at Valget af Projektionsplanen er vilkaarlig, naar den blot ikke gaar gennem A.

Lad os nu projicere Kurven fra et fra A forskelligt Punkt Q af a ind paa en Plan π_1 og finde hvilket særegent Punkt Projektionen A_1 af A maa blive for Projektionen R_1. Det følger nu af Definitionen (1), at Planen α efter at den er drejet om a en lille Vinkel til den ene Side vil skære Rumkurven R i to ved A nærliggende Punkter, medens den ikke skærer R i noget ved A nærliggende Punkt, naar Drejningen sker en lille Vinkel om a til den modsatte Side. For Projektionen R_1 følger heraf, at A paa R_1 maa være enten et Infleksionspunkt eller en Spids af anden Art. Men det kan ikke være et Infleksionspunkt, da enhver ret Linie l_1, der gaar gennem A_1 og ligger i π_1 men ikke i α, i saa Fald kun vilde skære R_1 i et enkelt Punkt, medens enhver Plan gennem Tangenten a sikkert maa skære R i mindst to i A sammenfaldende Punkter. Man har altsaa:

Projiceres en Rumkurve fra et Punkt af Tangenten i et Hyperoskulationspunkt (udenfor dennes Røringspunkt A), faar Projektionen en Spids af anden Art i Billedet af A. (5)

Af Beviset er det let at sé, at man fra (4) kan komme til (5), saa at den i (5) nævnte Egenskab kan bruges som Definition.

Lad os dernæst projicere Kurven R fra et Punkt A', der ligger paa selve Kurven og i Nærhed af et Hyperoskulationspunkt A. Da vi vil gaa ud fra, at Projektionen varierer kontinuert med Beliggenheden af Projektionscentret, vil ogsaa Projektionen R_1' af R fra A' paa en Plan π_1 faa et Infleksionspunkt, der ligger i Nærhed af A_1; heraf følger, at der gennem A' gaar en Oskulationsplan til Kurven, der berører i et Punkt B' i Nærhed af A'. Naar A' nærmer sig A i en bestemt Retning, vil ogsaa B' nærme sig til A og i dette Punkt vil A' og B' falde sammen. Punkterne A' og B' maa nødvendigvis bevæge sig paa hver sin af de to elementære Buer, der støder op til hinanden i A, og altsaa i en vis Nærhed af A bevæge sig i modsatte Retninger. Kaldes A' et Oskulationspunkt til B', naar Oskulationsplanen i B' gaar gennem A', kan man sige, at A er et Sammenfaldspunkt mellem Rækken af Kurvepunkter og Rækken af tilsvarende Oskulationspunkter. Ethvert Sammenfaldspunkt A af denne Art maa omvendt være et Hyperoskulationspunkt ifølge Definitionen paa et saadant; fra det bevægelige Punkt A' projiceres nemlig Kurven i en plan Kurve R_1' med et Infleksionspunkt B_1', der konvergerer mod et Vendepunkt for Projektionen i Sporet af Tangenten i A, naar A' konvergerer mod A. At de to Punkter A' og B' i en vis Nærhed af A bevæger sig i modsatte Retninger, følger af, at A sikkert ikke kan være et indre Punkt paa en elementær Bue [1]).

Man kan ogsaa faa et Hyperoskulationspunkt bestemt paa en anden Maade

[1]) Det er forudsat, at ikke en tæt Samling af Tangenter til den ene Bue skærer den anden, en Forudsætning, der er opfyldt for de Kurver, paa hvilke Resultaterne anvendes i det følgende.

som et Sammenfaldspunkt. Lad os som før projicere Rumkurven R fra et Punkt A' af selve Kurven og i Nærhed af et Hyperoskulationspunkt A ind paa en Plan π_1 i en Kurve R_1. Sporet af Tangenten i A' være A_1'. Da Projektionen i Nærheden af A_1 og altsaa ogsaa i Nærheden af A_1' har et Infleksionspunkt, vil der være én og kun én Tangent til Projektionen, der gaar gennem A_1' og berører i Nærheden af dette Punkt. Er dens Røringspunkt C_1', vil der til A' svare et andet Punkt C' af Rumkurven, der samtidig med A' ligger i Nærheden af A og saaledes, at Tangenterne i A' og C' skærer hinanden. A' og C' kaldes indbyrdes Tangentialpunkter. Deres Forbindelse er gensidig, og Punkterne maa bevæge sig i modsatte Retninger mod A, da to Tangenter til samme elementære Bue ikke kan skære hinanden. At hvert saadant Sammenfaldspunkt omvendt maa give et Hyperoskulationspunkt, ses som ovenfor. Man har altsaa:

(6) Ethvert Hyperoskulationspunkt kan fremkomme som Sammenfaldspunkt for Rækken af Kurvepunkterne A' og enten Rækken af tilsvarende Oskulationspunkter B' eller Rækken af tilsvarende Tangentialpunkter C'.

Tangenterne i A' og C' bestemmer en Dobbelttangentplan til Kurven, der saa at sige ruller paa denne, til den i den stationære Oskulationsplan faar en Grænsestilling; naar A' nemlig overskrider A, vil C' falde i de tidligere Stillinger for A', saa at den omtalte Plan nu vil rulle tilbage. Heraf ser man, at der, naar P overskrider en Hyperoskulationsplan α, vil tabes eller vindes en gennem P gaaende Dobbelttangentplan til Kurven. Naar et Punkt P nærmer sig α — og udenfor α — vil Røringspunkterne A_2' og C_2' for Dobbelttangenten til Kurvens Projektion fra P paa en Plan π_2 konvergere mod at falde sammen, og det Punkt A_2, hvori de falder sammen, naar P falder i α, er ikke noget Flerfoldspunkt eller en Spids. Den Bue A' C', der indeholder A, maa derfor i Projektionen afbildes som en indadgaaende Bue[1]; denne har to Infleksionspunkter, der altsaa forsvinder samtidig med selve Buen.

(7) Derved, at et Punkt P overskrider en stationær Plan, tabes eller vindes en gennem P gaaende Dobbelttangentplan til Kurven, og samtidig henholdsvis tabes eller vindes to gennem P gaaende Oskulationsplaner.

(8) Vi vil endnu vise, at Sporet σ_1 af Kurvens Tangentflade i en Plan π_1 har Sporene af Kurvens stationære Oskulationsplaner til Vendetangenter.


Fig. 33.

Lad Sporet af en stationær Plan α i π_1 være a_1. Da der derved, at et Punkt P (der bevæger sig i π_1) overskrider a_1, skal tabes eller vindes to gennem P gaaende Tangenter til σ_1, ser man, at a_1 enten maa være en Vendetangent eller Tangenten i en Spids af anden Art. For at sé, hvad det er, lader vi P bevæge sig saaledes i π_1, at det i A_1 overskrider Sporet af Tangenten a i Hyperoskulationspunktet A. Ved at projicere Kurven R fra A_1 ind paa

[1]) Dette er egentlig kun bevist for Kurver af fjerde Orden; det er ogsaa kun for disse Kurver, vi gør nogen virkelig Anvendelse af ovenstaaende.

en ny Plan π_2 faar Billedet en Spids af anden Art i Billedet A_2 af A. De nærliggende Buer, der svarer til, at P ligger paa den ene eller den anden Side af α, findes tegnede Fig. 33 i a) og b). Man ser, at der baade paa den ene og den anden Kurve optræder en enkelt Vendetangent i Nærheden af A_2. Dette viser, at der baade før og efter Overgangen gaar én Tangent til σ_1, der berører i Nærheden af A_1, saa at a_1 maa være en Vendetangent. (At der ogsaa vindes eller tabes en Dobbeltsekant ved at overskride Tangentfladen i et Punkt af a, følger let af det foregaaende.)

Af en af de bekendte Paritetssætninger fra Plangeometrien følger nu:

En Kurves Rang og Antallet af dens stationære Oskulationsplaner har samme Paritet.

Har Kurven specielt virkelige Spidser (ɔ: Punkter, der fra et vilkaarligt Punkt i Rummet udenfor Spidsen projiceres som Spidser), maa aabenbart deres Antal ogsaa have samme Paritet som Kurvens Rang.

Vi vil nu i de vigtigste Tilfælde sé at blive klar paa, hvorledes Antallet af de gennem et Punkt P gaaende Dobbeltsekanter, Oskulationsplaner og Dobbelttangentplaner forandrer sig, idet P flytter sig i Rummet.

Lad os antage, at Projektionen af en Rumkurve R fra én Stilling P_0 af et bevægeligt Projektionscentrum P faar tilsyneladende Dobbeltpunkter med forskellige Tangenter. Fra nærliggende Stillinger af P (hvortil Punktet kan komme fra P_0 uden at overskride de særlige Stillinger, vi straks skal omtale) vil Projektionen faa det samme Antal Dobbeltpunkter, og disse vil være nærliggende ved de oprindelige. Antallet vil kun kunne forandre sig enten derved, at to Buer i Projektionen berører hinanden, eller derved, at en Bue gaar gennem en anden Bues Spids, eller endelig derved, at en enkelt Bue faar en ny Spids. Det mellemste Tilfælde kan man, om man vil, altid undgaa, og vi vil ikke give os af dermed. I det første af de to tilbageblevne Tilfælde maa enten to Dobbeltpunkter i Projektionen forsvinde eller to saadanne maa komme til. I Rummet vil P samtidig overskride det geometriske Sted for Forbindelseslinierne mellem Par af saadanne Punkter paa Kurver, hvis Tangenter skærer hinanden. Disse Linier (gaar vi ud fra) danner en udfoldelig Flade, der kaldes Kurvens dobbelt omskrevne udfoldelige Flade U. Men derved, at P overskrider den, vil der da ogsaa tabes eller vindes to gennem P gaaende Tangentplaner til U; man kan i Almindelighed intet sige om, hvorledes Vinding og Tab af Dobbelttangentplaner og Dobbeltsekanter hører sammen.

Lad os nu først antage, at P udgaar fra et Kurvepunkt P_0, der er et indre Punkt paa en elementær Bue og at P_0 hverken ligger paa et andet Punkts Tangent eller paa en Trisekant. Idet P bevæger sig ud fra P_0, vil vi særlig tænke paa, at P bevæger sig langs en ret Linie l. Der vil nu derved, at P forlader Kurven, optræde et vist Antal nye Dobbeltsekanter gennem P; Grænsestillingerne for disse, svarende til, at P flyttes tilbage til P_0, faar man ved at lægge en Plan gennem l og Kurvens Tangent i P_0; skæres Kurven af denne Plan udenfor P_0 i Q_1, $Q_2 \ldots Q_s$, bliver de nævnte Grænsestillinger $P_0 Q_1$, $P_0 Q_2 \ldots P_0 Q_s$. Der vil altsaa optræde s nye Dobbeltsekanter derved, at P forlader Kurven. Ifald der gennem P_0 havde gaaet en Sekant, der udenfor P_0 skar Kurven i t Punkter, vilde Opløsningen af t-foldspunktet endnu medføre $\frac{1}{2}\, t\, (t-1)$ nye Dobbeltsekanter gennem P.

Lad os dernæst antage, at der gennem Punktet P_0 paa Kurven gaar n_0 Oskulationsplaner, der berører udenfor P_0. Derved, at P bevæger sig ud fra P_0, vil der i det første Øjeblik optræde én ny Oskulationsplan, og dennes Røringspunkt maa ligge i Nærheden af P_0. Lægges nemlig en Plan gennem P og Tangenten i P_0, vil Skæringslinien γ mellem denne Plan og Kurvens Tangentflade faa et Infleksionspunkt i P_0. Naar nu et Punkt P bevæger sig ud fra P_0 langs en ret Linie — der ogsaa godt kan være Tangenten i P_0 — vil der herved tilkomme en gennem P gaaende Tangent til γ, hvis Røringspunkt vil konvergere mod P_0, naar P gør det. Ved P's yderligere Bevægelse kan der kun ské Ændringer i Antallet af Oskulationsplaner gaaende gennem P ved Overskridning enten af Kurvens Tangentflade eller af de stationære Planer (udenfor Tangenten i Hyperoskulationspunktet). Dette følger af det tidligere, naar P's Bevægelse i Nærheden af Overgangspunktet sker i en Plan, og kan allerede herved anses for væsentlig almengyldigt, da Ændringer i Antallet ved Overgang fra ét Punkt til et andet maa være uafhængige af Vejen, der gennemløbes mellem disse Punkter. Ved den førstnævnte Overgang tabes eller vindes to gennem P gaaende Oskulationsplaner — og samtidig henholdsvis vindes eller tabes én Dobbeltsekant. Ved den sidstnævnte Overgang vil der ligeledes tabes eller vindes to Oskulationsplaner — og samtidig vil der henholdsvis tabes eller vindes én gennem P gaaende Dobbelttangentplan til Kurven.

Ændringer i Antallet af Dobbelttangentplaner gaaende gennem et bevægeligt Punkt sker udenfor Kurven dels ved at overskride dennes dobbelt omskrevne udfoldelige Flade dels ved at overskride en stationær Plan. Disse Overgange er allerede betragtede ovenfor. Man kan i dette Tilfælde intet almindeligt sige om Antallet af de nye Dobbelttangentplaner, der kommer til derved, at P bevæger sig ud fra et Punkt P_0 af Kurven. Det nævnte Antal — der almindeligvis er lige — vil væsentlig bero paa, hvorledes Begyndelsesstillingen af P ligger i Forhold til de Næt af den dobbelt omskrevne udfoldelige Flade, der gaar gennem P_0.

§ 8.

Almindelige Sætninger om Rumkurver af fjerde Orden.

Vi vil begynde med at omtale, hvorledes en R^4 kan være sammensat af fuldt adskilte Grene. En plan Kurve af fjerde Orden kan sammensættes af et vilkaarligt Antal Grene, men dette er ikke Tilfældet med Rumkurven. Enhver R^4 projiceres nemlig fra hvert af sine Punkter som en Kurve af tredie Orden, og denne kan højest sammensættes af 2 Grene, medmindre den da bestaar af 3 rette Linier. Heraf har man straks:

En R^4, der skal dannes af 4 Grene, maa være sammensat af fire rette Linier; skal den dannes af tre Grene, maa den være sammensat af en ret Linie og en sammensat Kurve af tredie Orden. (1)

Vi vil nu betragte det Tilfælde, at Kurven er sammensat af to Grene. Disse maa enten begge være af lige eller begge af ulige Orden; de kan derfor enten være 1) en ret Linie og en Gren af tredie Orden, 2) to Grene af fjerde Orden, 3) en Gren af fjerde og en af anden Orden, 4) to Grene af tredie Orden. At disse forskellige Muligheder svarer til virkelig eksisterende Kurver, er bekendt fra de algebraiske Kurvers Theori undtagen for Tilfældet 3). Dette kan man imidlertid ud fra vore Forudsætninger ikke udelukke. Lad os nemlig tage en algebraisk Kurve af fjerde Orden sammensat af to Grene α og β af fjerde Orden. Projicerer man β fra et Punkt P af α, maa Projektionen blive af anden Orden (men intet Keglesnit), idet ingen Plan gennem P kan skære β i flere end to Punkter. Da nu P kan antages hverken at ligge paa en Trisekant til β eller paa en Tangent eller paa en stationær Oskulationsplan til β, vil denne ikke alene fra P men ogsaa fra ethvert Punkt, der ligger i et tilstrækkeligt lille Omraade, der omgiver P (et saadant, der ikke indeholder Punkter af den udelukkede Beskaffenhed), projiceres som en Kurve af anden Orden. I dette Omraade kan man lægge en vilkaarlig plan Kurve af anden Orden, der sammen med β vil danne en sammensat R^4, ɔ:

Foruden de sammensatte R^4, der allerede har typiske Repræsentanter mellem de algebraiske Kurver, findes efter de almindeligere Forudsætninger ogsaa Kurver, der er sammensatte af en Gren af fjerde og en af anden Orden. (2)

Vi vil nu særlig betragte den Kurve, der er sammensat af to Grene af tredie Orden.

Antallet af de gennem et Punkt P gaaende Dobbeltsekanter er højst to; én vil der altid findes, og det nævnte højeste Tal kan altid naas. (3)

At der altid findes mindst én, følger af, at Projektionerne G_1^3, og G_2^3 af de to Grene R_1^3 og R_2^3 fra et vilkaarligt Punkt P ind paa en Plan altid maa have mindst ét Punkt fælles. Flere Skæringspunkter mellem G_1^3 og G_2^3 er ikke mulige, da en ret Linie gennem to saadanne vilde skære $G_1^3+G_2^3$ i 6 Punkter. Til denne ene kan der komme én Dobbeltsekant til en af Grenene R_1^3 eller R_2^3. Der kan ikke gennem P gaa én Dobbeltsekant til R_1^3 og samtidig én til R_2^3, thi en Plan gennem to saadanne Linier vilde skære i 6 Punkter.

Den sammensatte Kurves Klasse maa være 6. (4)

Det kommer efter § 6 (6) kun an paa at vise, at dette Tal altid kan naas. Gennem et vilkaarligt Punkt P_1 af en Tangent a til R_1^3 kan ikke gaa nogen Dobbeltsekant b til R_2^3, da Planen (ab) vilde skære i 6 Punkter. Gennem P_1 gaar altsaa 3 Oskulationsplaner til R_2^3; det samme vil være Tilfældet for et vilkaarligt andet Punkts Vedkommende, der blot ligger i et vist Omraade, der omgiver P_1 — nemlig et saadant, der ikke indeholder noget Punkt af R_2's Tangentflade. Vælger man nu et saadant Punkt P i Omraadet, at det tillige ligger paa den positive Side af den gennem P_1 gaaende Tangentflade til R_1^3, vil der gennem P gaa 6 Oskulationsplaner til $R_1^3+R_2^3$.

(5) Den sammensatte Kurves Rang er 8. Det kommer kun an paa at vise, at dette Tal kan altid naas.

Lad os nemlig paa den nysnævnte Maade bestemme et Punkt P, gennem hvilket der gaar tre Oskulationsplaner til hver af Grenene. Projiceres den sammensatte Kurve fra P ind paa en Plan, faar man i Projektionen to Kurver G_1^3 og G_2^3 uden Dobbeltpunkter, der har et Punkt A fælles. Fra A udgaar to Tangenter til hver af Kurverne foruden de Tangenter, der berører i A. Men i et lille Omraade om A maa der, da man kan gaa ud fra, at ingen af Grenene i A har et Infleksionspunkt, findes et Punkt, der ligger paa den positive Side af begge de to gennem A gaaende Buer. Gennem et saadant Punkt B gaar 8 Tangenter til G_1+G_2, og Linien AB vil derfor skære 8 Tangenter til R_1+R_2.

Lad os nu betragte en enkelt Gren af fjerde Orden. Kurven kan enten have Trisekanter eller ingen saadanne.

Lad s være en ret Linie, der skærer Kurven i de tre adskilte Punkter A, B, C. Fra A projiceres Kurven i en G^3 med et Dobbeltpunkt hørende til en Sløjfe. Gaar man fra A over til et nærliggende Kurvepunkt som Projektionscentrum, maa den nye Projektion, der er nærliggende til G^3 ogsaa have en Sløjfe hørende til et Dobbeltpunkt. Lader man Projektionscentret løbe videre paa Kurven, maa et Dobbeltpunkt vedblivende findes i Projektionen enten til Stadighed eller indtil Sløjfen svinder ind, saa at der kommer en Spids; derefter forsvinder Dobbeltpunktet, ɔ:

(6) Naar en Kurve af fjerde Orden har én Trisekant, maa den have uendelig mange, der vil danne en vindskæv Flade. Findes der berørende Trisekanter, vil de enkelte Punkter, disse har fælles med Kurven, skille en Bue, fra hvis Punkter der udgaar Trisekanter, fra en saadan, hvor dette ikke er Tilfældet.

At Fladen ikke kan være udfoldelig, følger af, at en Tangentplan til denne vilde faa 6 Punkter fælles med Kurven.

Det er let at sé, at en Gren med Trisekanter ikke sammen med nogen anden Gren kan danne en sammensat Kurve af fjerde Orden.

Lad os nu betragte en enkelt Kurvegren af fjerde Orden uden Trisekanter. Her vil der gennem hvert Kurvepunkt A gaa tre Oskulationsplaner, der hver berører i et Punkt B forskelligt fra A. Til hvert Punkt A svarer altsaa 3 adskilte Punkter B, og til hvert Punkt B svarer ét Punkt A. Heraf følger, som ofte tidligere benyttet, at samtidige Punkter B alle maa bevæge sig i én og samme Retning paa Kurven, der enten kan være den samme som den, hvori Punktet A bevæger sig, eller den modsatte. I det sidste Tilfælde finder 4 Sammenfald Sted mellem et Punkt A og et tilsvarende Punkt B; der findes altsaa ifølge § 7 (6) fire Hyperoskulationspunkter paa Kurven. Men vi har tidligere bevist, at i Nærheden af et saadant Punkt bevæger et Kurvepunkt og dettes Oskulationspunkt sig altid i modsatte Retninger; eksisterer altsaa blot ét Hyperoskulationspunkt, maa A og B bevæge sig i modsatte Retninger. Man har altsaa:

En usammensat Kurve af fjerde Orden uden Trisekanter har enten ingen eller fire stationære Oskulationsplaner. (7)

Lad s være en Dobbeltsekant, der i A og B skærer Kurven. Projiceres denne fra A i en G^3, vil der fra Projektionen af B udgaa to Tangenter til G^3. Man har altsaa:

Enhver Dobbeltsekant til en Gren af fjerde Orden vil skære to Tangenter til denne udenfor deres Røringspunkt. (8)

Sætningen gælder specielt ogsaa, naar Dobbeltsekanten gaar over til at blive en Tangent. Ved Hjælp heraf kan man ogsaa faa et andet Bevis for (7), idet man betragter Forbindelsen mellem et vilkaarligt Kurvepunkt A og et andet Kurvepunkt C, hvis Tangent skærer Tangenten i det førstnævnte Punkt (sé Sætning (6) § 7).

Det kan endnu bemærkes, at da Kurven har Dobbelttangentplaner, maa der ogsaa findes Planer, der ikke skærer Kurven. Man kan derfor i alle Tilfælde gaa ud fra, at Kurven — i hvert Fald efter en Omprojektion — ligger helt i det endelige.

Vi vil nu betragte en Gren af fjerde Orden dels med et virkeligt Dobbeltpunkt dels med en virkelig Spids. Da enhver Plan gennem et saadant Punkt dér vil skære i to (sammenfaldende) Punkter, ser man let, at en Gren med Dobbeltpunkt eller Spids ikke sammen med nogen anden Gren kan danne en sammensat Kurve af fjerde Orden.

Lad os nu først tage Kurven med et Dobbeltpunkt O. Ud fra dette maa Kurven projiceres ved en Kegle af anden Orden. En Frembringer i denne kan kun have ét Punkt fælles med Kurven, thi skar den i to Punkter A og B, vilde en Plan gennem O, A og Tangenten i a skære i mindst 5 Punkter; specielt indbefattet heri har man, at der fra O ikke kan udgaa nogen Tangent til Kurven.

Ved Dobbeltpunktet deles Kurven i to Pseudogrene α og β; disse maa enten begge være af lige Orden, eller begge af ulige Orden.

Vi vil nu først antage, at de begge er af lige Orden. Projicerer man Kurven fra et Punkt A af α, vil hele Kurven $\alpha+\beta$ projiceres i en Kurve $\alpha_1+\beta_1$ af tredie Orden med et Dobbeltpunkt O_1. Projektionen af den Pseudogren α, hvorpaa Øjepunktet ligger, maa være den ulige Gren, thi α selv er af lige Orden. Da der nu fra ethvert Punkt af den ulige Pseudogren af en plan Kurve af tredie Orden udgaar to Tangenter, hvoraf den ene berører Sløjfen, har man:

Enhver Tangent til Kurven skærer to andre Tangenter én til hver af de to Pseudogrene. (9)

Vi vil nu søge Kurvens stationære Planer og dertil benytte f. Eks. den sidstnævnte af de to ovenfor nævnte Metoder. Lad A og C være to saadanne Punkter af samme Pseudogren, hvis Tangenter skærer hinanden. Mellem Punkterne A og C er der da efter det nysnævnte en gensidig éntydig Forbindelse. Naar A falder i O, maa ogsaa C falde i O, da der ellers enten vilde gaa en Tangent gennem O, der ikke berørte i O, eller vilde gaa en Plan gennem de to Tangenter, der skar i flere end 4 Punkter. Naar A ligger paa en af de gennem O gaaende Buer af α og i Nærheden af O, maa C ogsaa ligge paa α i Nærheden af O, men nødvendigvis paa den anden gennem O gaaende Bue af α; to Tangenter til samme elementære Bue kan nemlig ikke skære hinanden. Punkterne A og C maa derfor i Nærheden af O og altsaa overalt gaa i modsatte Retninger. Af de to Sammenfaldspunkter ligger nu det ene i O. Man har altsaa:

(10) En Rumkurve af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og sammensat af to Pseudogrene af lige Orden har to stationære Planer én til hver Pseudogren.

Har Kurven en Spids, har den ikke to Pseudogrene. De ovenstaaende Slutninger kan dog anvendes, da Grenen er af lige Orden, og man faar:

(11) Har en Rumkurve af fjerde Orden en Spids, vil hver Tangent skære en enkelt anden Tangent, og den vil have én stationær Oskulationsplan.

Lad os nu tage det Tilfælde, hvor de to Pseudogrene α og β begge er af ulige Orden. Projicerer man Kurven paa en Plan fra et Punkt A af α, vil Billedet af α blive den lige Gren, altsaa Ovalen af Projektionen af en G^3, og gennem et Punkt M af denne gaar ikke nogen Tangent til Kurven (foruden den, der berører i M). Her vil en Tangent altsaa ikke skære nogen anden Tangent. Kurven kan endvidere ikke have noget Hyperoskulationspunkt, thi projicerede man Kurven fra dette, vil man paa Sløjfen af en plan Kurve af tredie Orden faa et Vendepunkt, hvilket er umuligt ɔ:

(12) En Rumkurve af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt og sammensat af to Pseudogrene af ulige Orden har intet Hyperoskulationspunkt.

Som vi har sét, kan man nok sige noget om den almindelige Rumkurve af fjerde Orden, men det er ganske vist ikke meget. Mest Interesse vilde det have at kende det højeste Antal af Dobbeltsekanter og af Oskulationsplaner, der kan gaa gennem et Punkt af Rummet. Det er dog tvivlsomt, om det overhovedet er muligt at sige noget herom i Almindelighed. I hvert Fald er de Antal, der er vel kendte fra de algebraiske Kurver, ikke højere Grænser for de her søgte. Lad os for at sé dette tage en Kurve af fjerde Orden R^4 uden Trisekanter. Her findes Tangenter, der skærer hinanden; lad Røringspunkterne for to saadanne være A og C. Dobbeltsekanten $AC = s$ er da en Frembringer i Kurvens dobbelt omskrevne udfoldelige Flade U. Denne antages ikke at være en Kegle, hvad der vel er nødvendigt ved algebraiske Kurver men ikke er det her[1]). Fra et Punkt, der ligger nær ved U — men ikke ved R^4 eller ved U's Spidskant — og tillige paa en bestemt af Fladens to Sider vil der efter det foregaaende gaa mindst to Dobbeltsekanter til R. Der findes nu altid to Tangenter, der skærer en Dobbeltsekant s; lad Tangenten m skære s i P_1. Man kan da altid finde et Punkt P nær ved P_1 af den Beskaffenhed, at der gennem P gaar to Dobbeltsekanter, der ligger nær ved s, og én, der ligger nær ved m, altsaa i det Hele sikkert mindst 3 Dobbeltsekanter.

Naar vi nu ved at specialisere Kurverne vil søge at faa nøjere Bestemmelse

[1]) En Rumkurve R^4 af denne Beskaffenhed vil senere blive konstrueret i § 12.

af de ovenfor nævnte Antal, ligger det nærmest at prøve med saadanne Kurver, hvor de højeste Antal bliver de samme som for de algebraiske Kurver af fjerde Orden. Af det ovenstaaende ses, at de eneste Kurver af fjerde Orden uden Trisekanter, hvor dette kan være muligt, er de, der er Skæringskurver mellem to Kegler af anden Orden — naturligvis ikke i Almindelighed Keglesnitskegler. Disse Kurver vil vi betragte i næste §.

To Kegler af anden Orden skærer hinanden i en Rumkurve af lige Orden. Om det nu er muligt, at en saadan Kurve kan være netop af fjerde Orden uden derfor at være algebraisk, er et Spørgsmaal vi indtil videre lader ligge. I det følgende undersøge vi Kurverne uden i hvert Fald at gøre Brug af den Omstændighed, at de muligvis er algebraiske.

§ 9.

Den monogrammatiske Skæringskurve af fjerde Orden mellem to Kegler af anden Orden.

Punkter af en Skæringskurve mellem to Kegler faar man ved at lægge Hjælpeplaner gennem Toppunkternes Forbindelseslinie. Er Keglerne af anden Orden, ser man let ved at følge Rækken af Skæringspunkter, at Kurven maa bestaa af én eller to Grene. Som det udførligere vises i Deskriptivgeometrien, vil der kun være én Gren, naar de to Tangentplaner, der gennem Toppunkternes Forbindelseslinie lægges til den ene Kegle, skiller de to Tangentplaner, der gennem samme Linie kan lægges til den anden Kegle. Vi vil holde os til, at Skæringskurven kun har én Gren, er monogrammatisk; den skal tillige indtil videre forudsættes at være uden virkelige Dobbeltpunkter eller Spidser.

Lad Keglerne være (O_1) og (O_2) med Toppunkterne O_1 og O_2. Her vil enhver Tangent a kun skære to andre Tangenter b og c, og de to Planer (ab) og (ac) maa netop være de to Tangentplaner, man gennem a kan lægge til Keglerne. Man ser altsaa, at Kurvens dobbelt omskrevne udfoldelige Flade bestaar af de to Kegler og ikke andre Dele.

Det er let at bestemme Kurvens stationære Oskulationsplaner. En Frembringer i den ene Kegle, der gaar gennem et Punkt A af Skæringskurven, vil nemlig skære den anden Kegle og altsaa ogsaa Kurven i endnu et Punkt B. Tangenterne i A og B skære hinanden, da de ligger i en Tangentplan langs Frembringeren AB. Sammenfald af et Punkt A med et tilsvarende Punkt B giver et Hyperoskulationspunkt ɔ: berører en Frembringer af den ene Kegle den anden Kegle, vil Røringspunktet være et Hyperoskulationspunkt. Disse Frembringere gennem O_1 faar man ved gennem $O_1 O_2$ at lægge en Tangentplan til Keglen (O_2); forsaavidt denne skærer (O_1), vil de herved bestemte Frembringere i (O_1) gaa gennem de søgte Punkter. Da Kurven er monogrammatisk, vil nu den ene og kun den ene af de to nævnte Tangentplaner skære (O_1); paa den Maade faar man altsaa to Hyperoskulationspunkter; ligesaa vil der være én og kun én Tangentplan gennem $O_1 O_2$ til (O_1), der skærer (O_2). Man har altsaa:

(1) Den monogrammatiske Skæringskurve af fjerde Orden mellem to Kegler af anden Orden har 4 stationære Oskulationsplaner.

Man ser, at disse stationære Planer er Tangentplaner til Keglerne.

Vi vil nu sé at bestemme Antallet af tilsyneladende Dobbeltpunkter i Kurvens Projektion.

Vi vil først vise:

(2) Kurvens Projektion kan ikke have flere end to Spidser.

I modsat Fald kunde man gennem et Punkt P drage 3 Tangenter; lad Røringspunkterne for disse være A, B og C. Efter det ovenstaaende maatte Forbindelseslinien mellem to hvilkesomhelst af disse Punkter være en Keglefrembringer. Et af Punkterne maatte derfor være Toppunkt i en af Keglerne tiltrods for, at Kurven ikke gaar gennem noget Toppunkt.

Lad nu først P være et Punkt i umiddelbar Nærhed af et Kurvepunkt A. Da der gennem A ikke gaar nogen Dobbeltsekant, der udenfor A skærer Kurven i to Punkter, kan der heller ikke gennem P gaa nogen Dobbeltsekant, der skærer i to Punkter, hvoraf intet konvergerer mod A, naar P konvergerer mod A. En gennem P gaaende Dobbeltsekant maa derfor skære Kurven i et Punkt i umiddelbar Nærhed af A ɔ: naar P ad en eller anden Bane konvergerer mod A, maa Grænsestillingen for de gennem P gaaende Dobbeltsekanter være Forbindelseslinierne mellem P og Kurvens Skæringspunkter med en Plan lagt gennem Kurvetangenten i A og Tangenten i A til P's Bane. Gennem P gaar derfor højst 2 Dobbeltsekanter, ligegyldigt paa hvilken Side af Kurven P end ligger. Dette gælder ogsaa, naar Tangenten i A til P's Bane ligger i en Oskulationsplan i A; i saa Fald er en af de gennem P gaaende Dobbeltsekanter blot Nabolinie til Kurvens Tangent i A. Det samme gælder endvidere ogsaa, selv om A er et Hyperoskulationspunkt.

Lad os nu tage en Dobbeltsekant, der skærer Kurven i A og B. Den skæres af to Kurvetangenter lad os sige i C og D. Disse Punkter maa nødvendigvis ligge udenfor begge Keglerne. Der vil derfor være et bestemt (endeligt eller uendeligt) Liniestykke AB, der ligger indeni begge Keglerne. Bevæger et Punkt P sig ad dette Stykke fra A til B, vil det ved denne Bevægelse hverken overskride Kurvens Tangentflade eller dens dobbelt omskrevne udfoldelige Flade; der vil derfor fra ethvert Punkt af dette Stykke udgaa 2 Dobbeltsekanter til Kurven, da dette er Tilfældet, naar P ligger i umiddelbar Nærhed af A eller B.

Samme Resultat kan ogsaa ses paa en anden Maade. Da der nemlig fra et Punkt P, der ligger indeni begge Keglerne, ikke udgaar nogen Tangentplan til disse, vil Kurvens Projektion fra P ikke have Dobbelttangenter. Projektionen hører derfor efter vor Enumeration af plane G^4 til den tredie Hovedtype, og en saadan Kurve har enten 2 eller 3 Dobbeltpunkter. Men havde den 3, maatte nødvendigvis det ene være af første Art d. v. s. der maatte gennem P gaa en Dobbeltsekant, der ikke skar nogen Tangent, hvilket er umuligt. Dette andet Bevis giver for saa vidt mere end det første, som det udtrykkelig godtgør, at der gennem ethvert Punkt, der ligger indeni begge Keglerne, udgaar to Dobbeltsekanter; det viser yderligere, at der gennem hvert saadant Punkt gaar 4 Oskulationsplaner til Kurven.

Vi vil nu lade Punktet P gennemløbe det Liniestykke AB, der ligger udenfor begge Keglerne, og lade P begynde i A. I umiddelbar Nærhed af A findes atter 2 Dobbeltsekanter gennem P, og Ændring i dette Tal kan kun ske derved, at P overskrider et af de to Punkter C og D, hvori AB skæres af to Kurvetangenter henholdsvis c og d. Lad C være det første af disse Punkter, som P naar ved at gaa ud fra A. Paa det Liniestykke CD, som ikke indeholder A, er det muligt, at der kunde udgaa 3 Dobbeltsekanter; den ene men ogsaa kun den ene af disse, vilde, naar P var Nabopunkt til C, være en Nabolinie til c. Tangenten c vil nu ogsaa skære to andre Tangenter e og f lad os sige i E og F. Ifald disse Punkter ikke skiller C fra c's Røringspunkt C_1, kan man lade P gennemløbe c fra C til C_1, saaledes at der paa Vejen hverken vindes eller tabes nogen gennem P gaaende Dobbeltsekant. Men gennem et Nabopunkt til C_1 gaar kun én Dobbeltsekant foruden Tangenten c; det er derfor umuligt, at der gennem C foruden Tangenten c kan gaa to derfra forskellige Dobbeltsekanter. Ved langs Linien AB at overskride C maa der altsaa nødvendigvis tabes en Dobbeltsekant.

I alle Tilfælde kan man paa en anden Maade komme fra C til et Nabopunkt til Kurven uden at overskride dennes Tangentflade. Man kan nemlig først lade P bevæge sig langs c fra C til E (hvorved F tænkes ikke overskredet) og til at begynde med paa den negative Side af den gennem C gaaende Tangentflade. Gik der gennem C en Dobbeltsekant foruden Tangenterne a og c, vilde der gennem E gaa mindst én Dobbeltsekant foruden de to Tangenter c og e. E er nu et Punkt af Tangentfladens Dobbeltkurve σ, og vi lader P bevæge sig videre langs denne. Herved kan P ifølge (2) ligesaalidt overskride Tangentfladen som Kurvens dobbelt omskrevne udfoldelige Flade. Men σ maa nødvendigvis nærme sig et Hyperoskulationspunkt paa Kurven, thi saadanne eksisterer i dette Tilfælde og de skal kunne fremkomme paa denne Maade. Fra et Punkt i Nærheden af Kurven udgik altsaa med vor Antagelse én Dobbeltsekant foruden to Tangenter. Dette er umuligt, og vi har bevist:

T i l e n m o n o g r a m m a t i s k S k æ r i n g s k u r v e a f f j e r d e O r d e n m e l l e m t o K e g l e r a f a n d e n O r d e n k a n f r a e t P u n k t h ø j e s t u d g a a 2 D o b b e l t s e k a n t e r. (3)

Man kan nu bestemme det højeste Antal af Oskulationsplaner, der kan gaa gennem et Punkt P af Rummet. Det Tal, der ikke kan overskrides, kan man finde af Formlen $t = \frac{1}{2} w + d$, hvor t, w og d er Antallet af Dobbelttangenter, Vendetangenter og Dobbeltpunkter i en Projektion af Kurven. Det højeste Antal af Dobbelttangentplaner gennem P er nu 4, og det mindste Antal af Dobbeltpunkter er Nul; den højeste Værdi for w er herefter 8. At dette Antal virkelig kan naas, ved man fra de algebraiske Kurver.

K l a s s e n f o r e n m o n o g r a m m a t i s k S k æ r i n g s k u r v e a f f j e r d e O r d e n m e l l e m t o K e g l e r a f a n d e n O r d e n e r 8. (4)

Naar Skæringskurven har et Dobbeltpunkt, bliver der i Virkeligheden kun meget lidt at ændre i Fremstillingen. Skæringskurven kan nu have et Dobbeltpunkt enten naar Keglerne berøre hinanden — i hvilket Tilfælde den sædvanlige Konstruktion ved Hjælpeplaner gennem Toppunkternes Forbindelseslinie viser, at Røringspunktet er et Dobbeltpunkt — eller naar den ene Kegles Toppunkt ligger paa den anden Kegle. Vi vil nu udtrykkelig holde os til den første Mulighed, der giver en snævrere Begrænsning end den anden, thi fra et Dobbeltpunkt vil en R^4 jo i alle Tilfælde projiceres ved en Kegle af anden Orden. Naar blot Kurven har et Dobbeltpunkt og er af fjerde Orden, kan den kun bestaa af én Gren.

Man bestemmer nu let aldeles som i det forrige Tilfælde Kurvens Hyperoskulationspunkter; der bliver (som der ogsaa skal blive) 2 saadanne; de tilhørende stationære Planer berører hver sin af Keglerne. Disse danner tilsammen den fulde dobbelt omskrevne udfoldelige Flade til Kurven.

At der ikke gennem noget Punkt i Rummet kan gaa flere end to virkelige Dobbeltsekanter d. v. s. saadanne, der ikke alene gaar gennem Kurvens virkelige Dobbeltpunkt, bevises paa selvsamme Maade som tidligere. Kurvens Klasse er 6, hvilket man ser af Relationen: $t = \frac{1}{2} w + d$, hvor t højest er 4 og d mindst er 1. Man har altsaa:

(5) En Skæringskurve af fjerde Orden mellem to Kegler af anden Orden, der berører hinanden, har ét virkeligt Dobbeltpunkt og to stationære Oskulationsplaner; gennem et vilkaarligt Punkt i Rummet gaar højest 2 egentlige Dobbeltsekanter, og Kurvens Klasse er 6.

§ 10.

Rumkurver af fjerde Orden med Trisekanter paa en Hyperboloide.

Vi har før nævnt, at en Rumkurve af fjerde Orden kan have Trisekanter, der da indenfor et vist Omraade maa danne en vindskæv Flade. Der kan paa dette Sted ikke godt være Tale om at betragte andre Tilfælde end det, hvor denne Flade er en Hyperboloide. Lad os da antage, at vi har en Kurve af fjerde Orden beliggende paa en Hyperboloide, og at en af dennes Frembringere f_1 skærer Kurven i tre adskilte Punkter A, B og C. Lægger man gennem f_1 Planer, vil disse yderligere skære Hyperboloiden i Frembringere g af det andet System, og hver af disse vil derfor have ét og kun ét Punkt fælles med Kurven. Lad os projicere Rumkurven fra A i en plan Kurve G^3; denne maa være en Kurve G^3 af tredie Orden med et Dobbeltpunkt F_1 i Sporet for f_1; den kan kun have én Gren. Lad Sporet for den gennem A gaaende Frembringer g_1 være G_1. Projektionerne af alle Frembringerne f vil da gaa gennem G_1. Da $F_1 G_1$ skærer G^3 i 3 Punkter — hvoraf to falder i F_1 — maa en ved denne nærliggende Linie gennem G_1 ogsaa skære i 3 Punkter, og dette maa vedblive indtil der naas en fra G_1 udgaaende Tangent til G^3. Af saadanne kan der findes 0, 2 eller 4. Disse Forhold, der alene vedrører Kurven R^4 og Hyperboloiden, maa være uafhængige af Punktet A's Beliggenhed, saafremt blot den gennem A gaaende Frembringer f virkelig skærer R^4 i 3 Punkter. Alle

Frembringerne f behøver ikke at gøre dette, thi Overgang mellem enkelte og tredobbelte Sekanter maa netop ske i de ovenfor bestemte Frembringere i Antal 0, 2 eller 4. Da nu en Kurve beliggende paa en Hyperboloide ikke kan have andre Linier end dennes Frembringere til Trisekanter, har man:

Naar en Rumkurve af fjerde Orden paa en Hyperboloide har én tredobbelt Sekant, maa alle Frembringerne af det ene System være enkelte Sekanter, og uendelig mange Frembringere af det andet System være tredobbelte Sekanter; 0, 2 eller 4 Frembringere af det sidstnævnte System vil berøre Kurven. (1)

Vi vil nu betragte de tre Tilfælde med 0, 2 eller 4 berørende Trisekanter hver for sig; kun i det første Tilfælde vil vi i det følgende kunne løse Opgaven fuldstændig.

I det første Tilfælde er samtlige Frembringere f Trisekanter. Projiceres Kurven fra et vilkaarligt Kurvepunkt A, bliver Projektionen en G^3 med Sløjfe, og Sporet G_1 af den gennem A gaaende Frembringer g_1 maa falde indeni Sløjfen, da enhver gennem G_1 gaaende ret Linie skal skære den plane Kurve i 3 Punkter; Kurvens Dobbeltpunkt er Sporet F_1 af den gennem A gaaende Frembringer f_1. Lad nu A_1 være Sporet af den Tangent a, der berører Kurven i A. De tre Punkter F_1, G_1 og A_1 maa ligge ud i ret Linie, da f, g og a alle ligger i Fladens Tangentplan i A. Men Forbindelseslinien mellem Dobbeltpunktet i G^3 og et Punkt, der ligger indeni dennes Sløjfe, maa nødvendigvis foruden i F_1 skære Kurven G^3 i et Punkt af Sløjfen. Da der nu ikke fra et Punkt A_1 af denne kan udgaa nogen Tangent, der berører udenfor A_1, kan a ikke skære nogen Tangent ɔ:

Kurven uden berørende Trisekanter har ingen Dobbelttangentplaner. (2)

Deraf, at Tangenten a i et aldeles vilkaarligt Punkt A skærer Kurvens Projektion ud fra A i et Punkt A_1 af dennes Sløjfe, kan vi ogsaa drage en anden Slutning. Hvis nemlig A var et Hyperoskulationspunkt, skulde A_1 være et Infleksionspunkt. Men et saadant kan ikke ligge paa Sløjfen ɔ:

Kurven uden berørende Trisekanter har ingen stationære Oskulationsplaner. (3)

Dette kan ogsaa udledes af (2) ifølge den almindelige Sætning § 7 (6).

Rumkurvens Projektion fra et vilkaarligt Punkt P i Rummet bliver ifølge (2) en Kurve af fjerde Orden uden Dobbelttangenter. Den tilhører altsaa efter Enumerationen i „Grafiske Kurver“ den tredie Hovedtype og har da efter den tidligere Theori enten 2 eller 3 Dobbeltpunkter og henholdsvis 4 eller 2 Vendetangenter. Begge disse to Tilfælde er mulige for forskellige Beliggenheder af Projektionscentret P. Projicerer man nemlig fra et Punkt P_1, der ligger paa Hyperboloiden, men ikke paa Kurven, faas en G^4, der har et tredobbelt Punkt med forskellige Tangenter. Projektionen fra et ved P_1 nærliggende Punkt maa da faa 3 Dobbeltpunkter. Gaar man nu fra P_1 ad en eller anden Vej til man første Gang overskrider Kurvens Tangentflade, maa der herved tabes én gennem Punktet gaaende Dobbeltsekant. Man har altsaa:

(4) Gennem et Punkt i Rummet gaar 2 eller 3 Dobbeltsekanter til Kurven uden berørende Trisekanter. Kurvens Klasse er 4.

Gennem ethvert Punkt M af en Tangent a gaar foruden Tangenten to Dobbeltsekanter. Dette ses nemlig straks at være rigtigt, naar M ligger i umiddelbar Nærhed af Tangentens Røringspunkt, og ingen Forandringer kan i den Henseende ské ved, at et Punkt bevæger sig langs a.

Projektionens Klasse giver Rumkurvens Rang. Vi ved nu, at en Kurve af den tredie Type og med 2 Dobbeltpunkter er af Klassen 6 eller 8, medens Klassen af en Kurve af samme Type med 3 Dobbeltpunkter altid er 6. Men man kan let sé, at Rangen for den Rumkurve, vi her betragter, er 6, hvoraf altsaa følger, at ikke enhversomhelst Kurve af tredie Type med 2 Dobbeltpunkter kan være Projektion af vor Rumkurve. Hvis nemlig en ret Linie m skærer en Kurvetangent i M, vil der fra et Punkt af m, der ligger i Nærheden af M — enten paa den ene eller den anden Side af M — nødvendigvis gaa 3 Dobbeltsekanter til Kurven. Man har altsaa:

(5) Rangen for Kurven er 6.

Ved Beviset for at Kurven kun kan have 3 tilsyneladende Dobbeltpunkter, har vi støttet os paa den tidligere Theori i „Indledning". Dette er forøvrigt ikke nødvendigt, som vi i næste § skal vise ved et noget almindeligere Eksempel.

For de to andre Typer, hvor der er 2 eller 4 berørende Trisekanter, kan vi langtfra naa det samme som ved den ovenfor behandlede. Først vil vi nævne et Par Smaasætninger.

(6) Projiceres en Rumkurve af fjerde Orden med Trisekanter beliggende paa en Hyperboloide fra et Punkt af Kurven ind paa en Plan, faar man en Kurve af tredie Orden og fjerde Klasse.

Sætningen er umiddelbart indlysende, naar der gennem Projektionscentret A gaar en Frembringer f, der er en tredobbelt Sekant. Men den er ogsaa rigtig, naar f ikke skærer Kurven udenfor A. Man véd nemlig fra Læren om plane Kurver af tredie Orden, at naar en saadan er af sjette Klasse, vil der fra ethvert Punkt i dens Plan gaa 2, 4 eller 6 Tangenter. Men til vor Kurve vil der fra Sporet F af f ikke udgaa nogen Tangent. Projektionen maa derfor være af fjerde Klasse.

(7) Røringspunktet mellem Kurven og en Trisekant vil til Oskulationsplan have Hyperboloidens Tangentplan i samme Punkt.

Oskulationsplanen i A er nemlig Grænsestillingen for en Plan gennem Tangenten a i A og et Punkt M, der langs Kurven konvergerer mod A. Planen (aM) vil nu foruden i a skære Fladen i en Frembringer g, der gaar gennem M. I Grænsestillingen vil denne Frembringer gaa gennem A og sammen med a bestemme Tangentplanen i A til Hyperboloiden.

Vi vil nu først betragte Kurven med 4 berørende Trisekanter og bevise:

(8) En Kurve af fjerde Orden paa en Hyperboloide med 4 berørende Trisekanter har ingen stationære Oskulationsplaner.

Lad os nemlig antage, at Kurven havde et Hyperoskulationspunkt A og lad os projicere Kurven fra A paa en Plan. Projektionen G^3 har et Vendepunkt A_1 i

Sporet af Tangenten a i A. Lad os med en ret Linie forbinde A_1 med Sporet F_1 af den gennem A gaaende Frembringer f_1. Denne sidste kan enten være en Trisekant eller kun skære Kurven i ét Punkt. I det første Tilfælde vil G^3 ikke have andre Vendetangenter end den ene, der berører i A_1. Lad nu et Punkt P bevæge sig paa Linien $F_1 A_1$ og lad os undersøge, hvormange Tangenter til G^3 der kan udgaa fra P til G^3. Ændringer i Antallet kan i hvert Fald kun ské i F_1, thi ved at overskride Infleksionspunktet A_1 vil der hverken vindes eller tabes nogen Tangent. Men heraf følger, at der heller ikke i F_1 kan ske nogen Ændring; thi hvad enten et Punkt paa $F_1 A_1$ ligger paa den ene eller den anden Side af F_1, kan man derfra uden Ændringer i det betragtede Antal komme langs $F_1 A_1$ til A_1. Men deraf følger atter, at Antallet overalt maa være 2, thi ellers vilde det i Nærheden af F_1 være 0 eller 4, eftersom P laa paa den ene eller den anden Side af F_1.

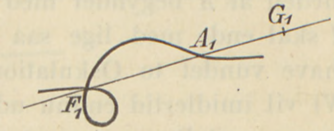

Fig. 34.

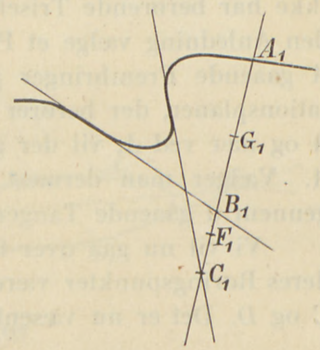

Fig. 35.

Lad os dernæst antage, at f_1 kun skærer Kurven i det ene Punkt A. En vilkaarlig ret Linie i Projektionsplanen og gennem F_1 vil da skære Projektionen G^3 i højest ét Punkt, og der kan derfor fra F_1 ikke udgaa nogen Tangent til G^3. Denne Kurve har foruden Tangenten i A_1 to andre Vendetangenter, og lad disse skære Linien $F_1 A_1$ i B_1 og C_1. Vi vil nu igen betragte Antallet af de Tangenter, der fra et vilkaarligt Punkt P af Linien $F_1 A_1$ kan udgaa til G^3. Ændringer i dette Antal kan kun ske derved, at P overskrider B_1 eller C_1. Men fra et Punkt P i Nærheden af F_1 udgaar ingen Tangenter til G^3; fra et Punkt af det Liniestykke $B_1 C_1$, der ikke indeholder F_1, vil der altsaa udgaa 2 Tangenter.

Lad nu den gennem A gaaende Frembringer g skære Projektionsplanen i G_1. Dette Punkt ligger i ret Linie med F_1 og A_1, da g_1, f_1 og a alle ligger i Hyperboloidens Tangentplan i A. Men naar Kurven skal have 4 berørende Trisekanter, maa der gennem G_1 gaa 4 Tangenter til G^3. Da dette strider mod det ovenstaaende, er det ikke muligt, at Kurven kan have stationære Oskulationsplaner.

Vi vil nu betragte de gennem et Punkt P gaaende Oskulationsplaner og bevise:

K u r v e n s K l a s s e e r 6. (9)

Lad os ved en ret Linie l forbinde et vilkaarligt Punkt P i Rummet med et saadant Punkt A af Kurven, at den gennem A gaaende Frembringer f er en Trisekant. Gennem A gaar kun én Oskulationsplan, der berører udenfor A_1. Gennem et Punkt P af l i Nærheden af A_1 gaar da ifølge § 7 to Oskulationsplaner, af hvilke den ene vil berøre i Nærheden af A. Ændringer i Antallet af Oskulationsplaner gaaende gennem et Punkt P, der bevæger sig langs l, kan kun ské i de Punkter, hvor l skærer Kurvens Tangentflade, thi Kurven har jo ingen stationære Planer. Da nu Rumkurvens Projektion fra A er af fjerde Klasse, vil der højst være 4 Tangenter til Kurven, der skærer PA; ved at overskride et af disse Skæringspunkter vil der tabes eller vindes to gennem P gaaende Oskulationsplaner. Da man nu i Nærheden af A begynder med 2 Oskulationsplaner og efter at have gennemløbet Linien l skal ende med lige saa mange, kan man højst ved to af de nævnte Overgange have vundet to Oskulationsplaner. Gennem P kan altsaa højst gaa 6 saadanne. Vi vil imidlertid endnu udtrykkelig vise, at dette højest mulige Antal virkelig kan naas; vort Ræsonnement vilde jo lige saa godt være gyldigt for den Kurve, der ikke har berørende Trisekanter, og dens Klasse er som ovenfor vist 4. Lad os i den Anledning vælge et Punkt A paa Kurven af den Beskaffenhed, at den gennem A gaaende Frembringer f kun skærer Kurven i A. Gennem A gaar da 3 Oskulationsplaner, der berører udenfor A. Betragtes nu et Punkt P paa Tangenten a i A og nær ved A, vil der gennem dette gaa 4 Oskulationsplaner, der berører udenfor A. Vælger man dernæst et Punkt Q nær ved P og paa den positive Side af den gennem a gaaende Tangentflade, vil der gennem Q gaa 6 Oskulationsplaner.

Vi vil nu gaa over til de Kurver, hvor der er to berørende Trisekanter. Lad deres Røringspunkter være A og B, og lad dem paany skære Kurven i henholdsvis C og D. Det er nu væsentligt, at Punkterne A og B ikke skiller C og D. Man kan sé dette ved at projicere vor Rumkurve R^4 fra C ind paa en Plan i en Kurve G^3. Denne faar en Spids i Sporet $A_1 = F_1$ af Tangenten AC i A. Fra Sporet G_1 af den gennem A gaaende Frembringer g gaar da én og kun én egentlig Tangent til G^3. Lad dennes Røringspunkt være B_1, dens derfra forskellige Skæringspunkt med G^3 være D_1, og lad A_1G_1 paany skære G^3 i C_1. Her ser man let, at B_1D_1 ikke vil skille A_1C_1, da der fra G_1 kun maa udgaa én Tangent til G^3, og de 4 nævnte Punkter er netop Projektionerne af B, D, A og C.

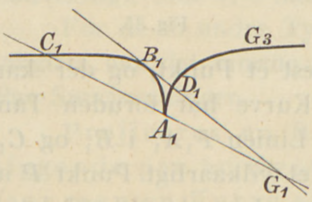

Fig. 36.

Ved Punkterne A, B, C og D deles altsaa Kurven i fire paa hinanden følgende Buer AB, BC, CD og DA, hvor vi ved en Bue stadig vil forstaa den med de angivne Endepunkter, der ikke indeholder noget af de andre Punkter.

Projektionen af Kurven fra C eller fra D har som nys nævnt en Spids. Projektionen fra Punkter af én og kun én af de Dele, hvori Kurven deles ved C og D, maa da faa et Dobbeltpunkt; den Del, hvor dette finder Sted, maa være sammensat af Buerne CB, BA og AD, thi fra A projiceres Kurven sikkert med et Dobbeltpunkt. Enhver Trisekant f maa derfor skære de 3 nævnte Buer hver i et Punkt; lad Skæringspunkterne henholdsvis være M, N og P. Projicerer man fra Punktet N af Buen AB, maa den Del af Kurven, der sammensættes af Buerne MB, BA og AP, være den, der projiceres i Sløjfen; Tangenten AC skærer nemlig Kurven i C, og Billedet af C maa nødvendigvis ligge paa den ulige Pseudogren af G^3. Projicerer man fra et Punkt M af Buen BC, ser man paa samme Maade, at den Del af Kurven, der projiceres i Sløjfen, maa være sammensat af Buerne NA og AP. Vi vil nu bevise:

En Tangent, der berører i et Punkt af Buen AB, vil ikke skære nogen anden Kurvetangent.

Vi vil projicere Rumkurven fra Punktet N.

Lad Tangenten n berøre i Punktet N af Buen AB. Sporet N_1 af n i Projektionsplanen vil være det fra F_1 forskellige Skæringspunkt mellem Projektionen G^3 og Linien F_1G_1, hvor F_1 og G_1 er Projektionerne af de gennem N gaaende Frembringere i Hyperboloiden. De to fra G_1 udgaaende Tangenter til G^3 berører i to Punkter A_1 og B_1, der er Billeder af A og B, og de maa derfor ifølge det ovennævnte begge ligge paa Sløjfen af G^3. Men deraf følger atter, at ogsaa N_1 maa ligge paa Sløjfen, thi ellers udgik fra G_1 tre Tangenter til denne (to egentlige og én uegentlig). Fra N_1 udgaar derfor ingen Tangent til G^3 ɔ: n kan ikke skære nogen Tangent til R^4. Af den beviste Sætning følger:

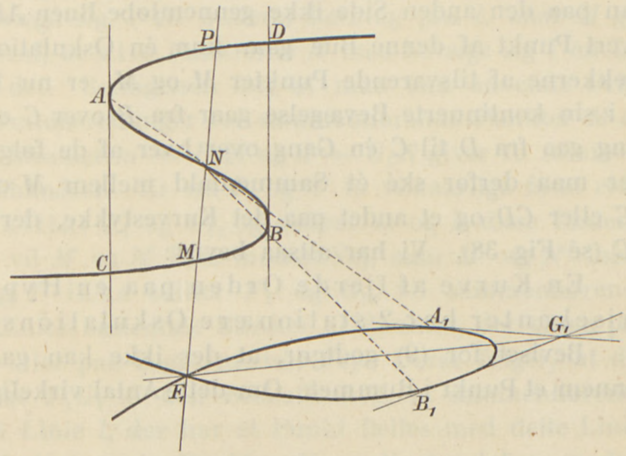

Fig. 37.

Paa Buen AB kan der ikke ligge noget Hyperoskulationspunkt.

En Tangent, der berører i Nærheden af et saadant Punkt W, maa nemlig sikkert skære en anden Tangent, hvis Røringspunkt ogsaa ligger i Nærheden af W.

Vi vil nu lade et Punkt gennemløbe hele Kurven R^4 fra A tilbage til A én Gang og undersøge den samtidige Bevægelse af M's Oskulationspunkt M_1. Naar M bevarer sin Retning, vil M_1 kun skifte Bevægelsesretning i C og D. Kurven har nemlig intet Punkt fælles med sin Tangentflade udenfor C og D, og lige saa lidt har den noget Punkt fælles med en af sine stationære Planer udenfor dennes Røringspunkt. Ved at overskride et Oskulationspunkt véd vi tillige fra det foregaaende, at M_1 vil bevare sin sin Retning, naar M gør det.

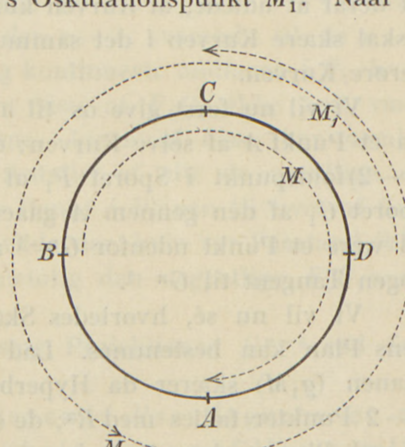

Fig. 38.

Naar nu M bevæger sig fra A til B langs Buen AB, maa M_1 gaa fra C til D, og det maa ske langs Buen CD, thi gik M_1 i den modsatte Retning fra C til D, vilde man faa et Sammenfald mellem M og M_1, altsaa et Hyperoskulationspunkt paa Buen AB.

Dernæst lader man M overskride B og gaa over C og D tilbage til A. Derved, at M overskrider B, skifter M_1 Retning, og da M_1's Retning under den forrige Bevægelse var den samme som M's, maa den nu være den modsatte. Bevægelsen af M_1 sker fra D til C, og dette Punkts kontinuerte

Bevægelse sker stadig i uforandret Retning. Under hele sin Bevægelse maa M_1 nødvendigvis mindst én Gang have gennemløbet hele Kurven, thi gennem hvert Punkt af denne gaar mindst én Oskulationsplan, der ikke rører i Punktet. Men det kan paa den anden Side ikke gennemløbe Buen AB mere end én Gang, thi gennem hvert Punkt af denne Bue gaar kun én Oskulationsplan. Afhængigheden mellem Rækkerne af tilsvarende Punkter M og M_1 er nu fuldstændig karakteriseret. Naar M i sin kontinuerte Bevægelse gaar fra B over C og D til A, vil M_1 i modsat Retning gaa fra D til C én Gang over hver af de følgende Buer: DC, CB, BA, AD, DC. Der maa derfor ské ét Sammenfald mellem M og M_1 et Steds paa en af Buerne BC eller CD og et andet paa det Kurvestykke, der er sammensat af Buerne AD og DC (sé Fig. 38). Vi har altsaa bevist:

(10) En Kurve af fjerde Orden paa en Hyperboloide med 2 berørende Trisekanter har 2 stationære Oskulationsplaner.

Beviset for (9) godtgør, at der ikke kan gaa flere end 8 Oskulationsplaner gennem et Punkt i Rummet. Om dette Antal virkelig kan naas, er dog ikke sikkert[1]).

§ 11.

Nogle Kurver af n-te Orden beliggende paa en Hyperboloide.

Vi vil nu betragte nogle Kurver af n-te Orden beliggende paa en Hyperboloide; særlig vil vi behandle den Kurve, som af alle Frembringerne f af det ene System skæres i $(n-1)$ Punkter. Projektionen af Kurven fra et Punkt af Hyperboloiden men udenfor Kurven bliver en Kurve af n-te Orden med et $(n-1)$folds Punkt; det er let deraf at udlede, at Kurven kun kan have én Gren. Deraf, at alle Frembringerne f skal skære Kurven i det samme Antal Punkter, følger, at ingen Frembringer kan berøre Kurven.

Vi vil nu først give os til at undersøge Projektionen G^{n-1} af Rumkurven R^n fra et Punkt A af selve Kurven; den bliver en Kurve af $(n-1)$te Orden, der har et $(n-2)$foldspunkt i Sporet F_1 af den gennem A gaaende Frembringer f_1 medens Sporet G_1 af den gennem A gaaende Frembringer g_1 af den anden Frembringerart vil være et Punkt udenfor G^{n-1} af den Beskaffenhed, at dér derigennem ikke gaar nogen Tangent til G^{n-1}.

Vi vil nu sé, hvorledes Skæringspunkterne mellem G^{n-1} og en ret Linie l i dens Plan kan bestemmes. Lad M være et vilkaarligt Punkt af den rette Linie. Planen (g_1M) skærer da Hyperboloiden i en Frembringer f, der foruden A har $n-2$ Punkter fælles med R^n; de derigennem gaaende Frembringere g forbindes med f_1 ved Planer, der atter skærer l i $(n-2)$ Punkter N_1, N_2, ... N_{n-2}. Ved de samme Konstruktioner tagne i omvendt Orden ser man, at der til hvert Punkt N vil svare ét Punkt M. Paa Linien l har man altsaa en Korrespondens $(n-2, 1)$; vi vil undersøge, hvorvidt man paa denne kan anvende det kombinatoriske Korre-

[1]) Realitetsegenskaber ved algebraiske Rumkurver af fjerde Orden med Trisekanter er undersøgte af K. Rohn: Die Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species II, Leipz. Berichte XLIII.

spondensprincip. Det ses nu først, at to sammenhørende Punkter N ikke kan falde sammen, thi ingen Frembringer f berører Kurven; Forbindelsen mellem M og et vilkaarligt men bestemt af Punkterne N er derfor gensidig éntydig. Deraf følger, at hvert enkelt Punkt N maa bevæge sig i en bestemt Retning paa l, naar M gør det, og omvendt; tillige følger heraf, at alle Punkterne N maa bevæge sig i en bestemt Retning paa l, naar M gør det. Betingelsen for, at man kan anvende Principet, er nu den, at tilsvarende Omløbsretninger for sammenhørende Punkter M og N er modsatte. Sammenhørende Straaler $m = F_1 M$ og $n = G_1 N$ giver to sammenhørende Straaler i to plane Liniebundter. Er nu l' og l'' to vilkaarlige faste rette Linier i Projektionsplanen, der skiller F_1 og G_1, og skærer m og n disse Linier i henholdsvis M' og N', M'' og N'', vil M' og N' løbe modsat Vej, naar M'' og N'' løber samme Vej. Ifald derimod l' og l'' ikke skiller F_1 og G_1, vil sammenhørende Straaler m og n paa de nævnte Linier bestemme Rækker af Punkter, der enten paa begge Linierne løber samme Vej eller paa begge modsat Vej. Deraf følger, at der vil findes et bestemt Liniestykke $F_1 G_1$ af den Beskaffenhed, at sammenhørende Straaler m og n paa enhver ret Linie l, der har et Punkt fælles med dette Liniestykke, vil bestemme Rækker af tilsvarende Punkter M og N, der løber modsat Vej. Dette Liniestykke, der enten kan være endeligt eller uendeligt, vil vi betegne ved $(F_1 G_1)$. Enhver ret Linie i Projektionsplanen, der har et Punkt fælles med $(F_1 G_1)$, vil altsaa have n Punkter fælles med Kurven G^{n-1}. Deraf følger, — og det er egentlig det Resultat, vi faar Brug for — at der fra intet Punkt af Liniestykket $(F_1 G_1)$ vil udgaa nogen Tangent til Kurven G^{n-1}.

Tangenterne i F_1 til G^{n-1} maa alle være forskellige, da R^n ligger paa en Hyperboloide. Man kan derfor paa sædvanlig Maade ud fra F_1 dele G^{n-1} i fuldstændig bestemte Pseudogrene, og af disse bliver der $n-2$, svarende til de $n-2$ Tangenter i F_1. Alle Pseudogrenene er fuldstændig kontinuerte undtagen i F_1, hvor de alle har et fremspringende Punkt. Vi vil nu vise, at $F_1 G_1$ ikke kan være uegentlig Tangent i F_1 til nogen af Pseudogrenene. Ingen af disse har nemlig nogen virkelig Spids; som en Følge deraf maa Antallet af alle de egentlige og uegentlige Tangenter, der udgaar fra et og samme Punkt i Planen til hver af Grenene, være lige. Men vælges et Punkt af $(F_1 G_1)$, vilde der, hvis vor Paastand ikke var rigtig, derfra udgaa én og kun én Tangent (nemlig den uegentlige $F_1 G_1$), og dette strider mod det nævnte.

Man kan nu endelig fuldstændigt karakterisere Projektionen G^{n-1} ved følgende Sætning:

Alle de fra Flerfoldspunktet F_1 udgaaende Pseudogrene er af ulige nemlig tredie Orden undtagen en enkelt, der er af lige nemlig anden Orden. (1)

Da $F_1 G_1$ nemlig ikke er uegentlig Tangent, skal F_1 kun regnes for et enkelt Skæringspunkt mellem Linien $F_1 G_1$ og hver af Pseudogrenene. Den nævnte Linie skærer nu Kurven G^{n-1} foruden i F_1 endnu kun i ét Punkt A_1. Den Pseudogren σ, hvorpaa A_1 ligger, skæres altsaa af $F_1 G_1$ i to Punkter, medens de øvrige kun skæres af F_1G_1 i ét Punkt nemlig F_1; σ er altsaa af lige Orden, de andre af ulige Orden.

Men σ maa være af anden Orden, thi en ret Linie, der skar den i 4 Punkter, vilde skære hver af de ulige Grene i mindst 1 Punkt, altsaa hele Kurven i $(4+(n-3))$ Punkter, hvilket er umuligt. Ligesaa ses, at enhver af de ulige Grene maa være af tredie Orden, thi en ret Linie, der skar en af dem i 5 Punkter, vilde skære hele Kurven i mindst $5+(n-4) = n+1$ Punkter.

Liniestykket (F_1G_1) maa ligge indeni σ, da der ikke fra noget af dets Punkter skal udgaa nogen Tangent til Kurven. Punktet A_1 maa ligge paa Forlængelsen af (F_1G_1), og fra intet Punkt M af det Stykke G_1A_1, der ikke indeholder F_1, kan der udgaa nogen Tangent til Kurven; der kan nemlig ikke gaa nogen Tangent til σ, da M ligger indeni σ, og der kan ikke gaa nogen Tangent til en af de ulige Grene, da en saadan vilde skære σ i 2 Punkter og hele Kurven i $2+3+(n-4) = n+1$ Punkter. Men heraf følger atter, at der gennem A_1 ikke kan gaa nogen anden Tangent til G^{n-1} end Tangenten i A_1. Nu er A_1 Sporet af Tangenten til Rumkurven i Punktet A. Vi har altsaa bevist:

(2) En vilkaarlig Tangent til Rumkurven kan ikke skære nogen anden Tangent til Kurven[1]).

Man ser allerede heraf:

(3) Rumkurven har ingen stationære Oskulationsplaner.

Man kan ogsaa sé dette paa en lidt anden Maade. Projicerer man nemlig fra et Hyperoskulationspunkt A, maa der findes et Infleksionspunkt paa Projektionen i Sporet A_1 af Tangenten i A. Men dette er umuligt, da A_1 er et Punkt af en Kurve af anden Orden.

Vi vil nu søge, hvormange Dobbeltsekanter til R^n der gaar gennem et vilkaarligt Punkt P af Rummet. Lad os først antage, at Punktet P bevæger sig langs en Tangent a ud fra dennes Røringspunkt A. Fra A udgaar for det første $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ i f sammenfaldende Dobbeltsekanter, da f er en $(n-1)$ dobbelt Sekant; dette Antal bibeholdes, idet P flytter sig lidt ud fra A. Men der tilkommer yderligere saa mange nye Dobbeltsekanter, som angives ved Antallet af de fra A forskellige Skæringspunkter mellem Kurven og dennes Oskulationsplan α i A (sé S. 29). Projicerer vi Rumkurven fra A i G^{n-1}, vil Sporet α_1 af α blive en Tangent til den lige Gren σ af G^{n-1}. Denne vil i Overensstemmelse med det tidligere skære hver af de ulige Pseudogrene af G^{n-1} i ét Punkt ɔ: skære G^{n-1} i $(n-3)$ Punkter (udenfor σ). Fra et ved A nærliggende Punkt P af a udgaar altsaa:

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+n-3 = \frac{1}{2}n(n-3)$$

Dobbeltsekanter foruden Tangenten a. Dette Antal vil ikke kunne forandres ved at P bevæger sig videre langs a, thi derved kan Tangentfladen ifølge (2) ikke overskrides, og der findes ingen dobbelt omskreven udfoldelig Flade. Fra et Punkt P,

[1]) Plane Kurver uden reelle Dobbelttangenter er undersøgte af Ms. C. A. Scott, sé „On the circuits of plane curves" Transactions of the Amer. Math. Society. Vol. 3 (1902), S. 388.

der er nærliggende ved A, udgaar dernæst enten $\frac{1}{2}n(n-3)$ eller $\frac{1}{2}n(n-3)+1$ Dobbeltsekanter, eftersom P ligger paa den positive eller den negative Side af den gennem a gaaende Tangentflade. Da man nu kan komme fra et vilkaarligt Punkt i Rummet til Tangentfladen uden at overskride denne Flade, har man:

Fra et vilkaarligt Punkt i Rummet udgaar enten $\frac{1}{2}n(n-3)$ eller $\frac{1}{2}n(n-3)+1$ Dobbeltsekanter. (4)

Vi vil nu gaa over til at bestemme Kurvens Klasse. Først vil vi finde det Antal af Oskulationsplaner, der gaar gennem et vilkaarligt Punkt A af Kurven ɔ: Antallet af Vendetangenter i Kurvens Projektion ud fra A. Paa den lige Gren σ af Projektionen findes ikke noget Infleksionspunkt, men man kan vise, at der vil ligge ét paa hver af de ulige Pseudogrene. En saadan er nemlig af tredie Orden, og man kan bevise, at Flerfoldspunktet F_1 paa hver Gren vil være en Torn (et fremspringende Punkt af første Art). Enhver Tangent til en ulige Gren G^3 vil nemlig skære samme Gren i endnu ét og kun ét Punkt. Lad nu t være en Tangent til G^3 i F_1; den har udenfor F_1 intet Punkt fælles med G^3. En Tangent t_1 til denne Gren, der er nærliggende til t, vil da heller ikke kunne have noget andet Punkt Q fælles med G^3 end et saadant, der konvergerer mod F_1, naar t_1 konvergerer mod t, d. v. s. Q maa være nærliggende ved F_1. Da dette gælder begge Tangenterne i F_1 til G^3, maa F_1 efter de tidligere Beskrivelser være en Torn. Men en Kurve af tredie Orden med en Torn har altid én og kun én Vendetangent. Hele Kurven G^{n-1} har altsaa $n-3$ Vendetangenter ɔ: gennem hvert Punkt af Rumkurven gaar $n-3$ Oskulationsplaner, der berører udenfor det førstnævnte Punkt.

Lad nu et Punkt P bevæge sig paa en Tangent a til Kurven R^n ud fra dens Røringspunkt A. Ved Bevægelsen ud fra A tilkommer i det første Øjeblik én ny gennem P gaaende Oskulationsplan, den Oskulationsplan α, der berører i A, ikke medregnet. Der gaar altsaa foruden α endnu $n-2$ Oskulationsplaner gennem et Punkt P af a, naar dette ligger nær ved A. Men Forandring i dette Tal kan ikke ské, naar P bevæger sig videre paa a, thi denne Linie overskærer ikke Tangentfladen, og Kurven har ingen stationære Oskulationsplaner.

Fra et Punkt P, der er i Nærheden af a, udgaar der endelig enten n eller $n-2$ Oskulationsplaner, eftersom P ligger paa den positive eller den negative Side af den gennem a gaaende Tangentflade. Man ser heraf aldeles som ved den forrige Bestemmelse i Stng. (4):

Kurvens Klasse er n; gennem hvert Punkt i Rummet gaar enten n eller $n-2$ Oskulationsplaner. (5)

Vi vil nu endelig forsøge at finde Kurvens Rang ɔ: Klassen af dens Projektion fra et vilkaarligt Punkt i Rummet. Til at begynde med vil vi lade Projektionscentret A ligge paa selve Kurven og altsaa finde Klassen af den ovennævnte Kurve G^{n-1}, der har et $(n-2)$foldspunkt i F_1. Lad P være et vilkaarligt Punkt i Projektionens Plan og lad os forbinde P med et vilkaarligt valgt fast Punkt Q af den lige Gren σ af G^{n-1} ved en ret Linie l. Gennem Q gaar ingen anden Kurvetangent end den, der berører i Q. Linien PQ skærer σ i endnu ét Punkt Q_1, og hver af de $n-3$ ulige Pseudogrene af G^{n-1} i ét Punkt S. Desuden vil Linien l skære Kurvens Vendetangenter i $n-3$ Punkter R. Fra et Punkt af det Liniestykke PQ_1, der ligger indeni σ, udgaar ingen Tangent. Men naar et bevægeligt Punkt M gennemløber det Liniestykke PQ, der ligger udenfor σ, vil der ske Ændringer i Antallet af Tangenter udgaaende fra M med $+2$ eller -2, naar M overskrider et af Punkterne S eller R. Fra et saadant Punkt af det sidstnævnte Liniestykke, der ligger i umiddelbar Nærhed af Q eller Q_1, vil der udgaa 2 Tangenter til Kurven. Idet nu et Punkt M antages at løbe i en bestemt Retning fra Q til Q_1, kan vi sige, at der vil vindes 2 Tangenter ved x og tabes 2 Tangenter ved y af de nævnte Overgange. Man har da dels $x+y = 2(n-3)$, dels $2x-2y = 0$. Heraf finder man $x = n-3$. Men man maa faa det størst mulige Antal af Tangenter udgaaende fra et Punkt M, naar man ved at gaa fra Q til M kun har overskredet de x Punkter, hvor der vindes Tangenter. Det størst mulige Antal af Tangenter, der kan udgaa fra et Punkt i Planen, er altsaa $2+2(n-3) = 2n-4$.

Vi vil nu vise, at dette Antal virkelig kan naas. Lad nemlig P_1 være et Punkt i Projektionsplanen, der ligger nær ved Flerfoldspunktet F_1 og indeni σ. Fra P_1 udgaar der da ikke nogen Tangent til Kurven, og det maa derfor ligge paa den negative Side af alle de Buer, der gaar gennem F_1. Det symmetriske Punkt P_2 til P_1 med Hensyn til F_1 maa derfor ligge paa den positive Side af alle de nævnte $n-2$ Buer. Fra P_2 gaar der altsaa $2(n-2)$ Tangenter til G^{n-1}.

Vi vil nu vende tilbage til Rumkurven R^n og i et vilkaarligt Punkt A af denne drage Tangenten a og Oskulationsplanen α. Om et Punkt B af a og i α vil vi lade en ret Linie m dreje sig i en bestemt Omløbsretning fra a tilbage til a og undersøge, hvormange Tangenter Linien m i en vilkaarlig Stilling vil skære. Gennem B gaar foruden α endnu $n-2$ Oskulationsplaner; lad disse skære α i Linierne r_1, $r_2 \ldots r_{n-2}$. Planen α vil endvidere foruden i A skære Kurven i $n-3$ Punkter; lad disses Forbindelseslinier med B være $s_1, s_2 \ldots s_{n-3}$. Naar m i α drejer sig om B, vil der tabes eller vindes 2 Tangenter, der skærer m, derved at m overskrider en Linie r eller en Linie s. Linien a skærer ikke nogen Tangent; naar m er Nabolinie til a, vil den skære 0 eller 2 Tangenter, eftersom m ligger paa den ene eller den anden Side af a. Vindes der nu ved Drejningen af m ved x af de nævnte Overgange 2 Tangenter, medens der ved y af Overgangene tabes 2 Tangenter, har man, naar den første Nabolinie til a skærer 2 Tangenter, Ligningerne:

$$2+2x-2y = 0 \text{ og } x+y = 2n-5.$$

Heraf finder man $x = n-3$. Heraf ser man paa samme Maade som ovenfor, at en ret Linie, der ligger i en vilkaarlig Oskulationsplan, højst kan skære $2+2(n-3) = 2n-4$ Tangenter.

Lad nu endelig p være en fast men aldeles vilkaarlig ret Linie i Rummet. Gennem p lægges en fast Plan π, og i p vælges et fast Punkt P. Lad Planen π skære den givne Kurve i et Punkt M. Linien PM vil højest skære $2(n-2)$ Tangenter, af hvilke ingen berører i M; drejer man en Linie m i Planen π om P lidt til den ene eller den anden Side ud fra PM, skærer den højst enten $2(n-2)$ eller $2(n-1)$ Tangenter. Drejer man m videre om P vil en Ændring i Antallet kun kunne ské enten derved, at m overskrider en Skæringslinie mellem π og en gennem P gaaende Oskulationsplan, eller derved, at m overskrider en Forbindelseslinie mellem P og et Skæringspunkt mellem π og Kurven. Ved begge disse Overgange vil nu ifølge det foregaaende enten Antallet af Tangenter, der skærer m, forandres fra $2(n-2)$ til $2(n-1)$ (eller omvendt), eller ogsaa vil Antallene være mindre. Heraf følger, at den rette Linie p i Rummet højst kan skære $2(n-1)$ Tangenter.

Men dette Tal kan ogsaa virkelig naas. Man kan nemlig ifølge det ovenstaaende altid gennem et Kurvepunkt A drage en ret Linie p, som skærer $2(n-2)$ Tangenter foruden Tangenten i A. Drejer man denne Linie ind i en Nabostilling om et af sine Punkter, kan man aabenbart yderligere bringe den til at skære to andre Kurvetangenter, der berører i Nabopunkter til A.

Vi har altsaa bevist:

Kurvens Rang er $2n-2$. (6)

Vi vil endnu opstille et Par Sætninger om en anden Art Rumkurver af n-te Orden beliggende paa en Hyperboloide. En af de Kurver, vi nu betragter, skal af enhver Frembringer f af den ene Art skæres i $n-2$ Punkter; deraf følger, at den af Frembringerne g af den anden Art maa skæres i 0 eller 2 Punkter. Det er let at finde det højeste Antal af Frembringere g, der kan berøre Kurven. En Frembringer g, der har et Punkt M fælles med Kurven, maa nemlig nødvendigvis endnu skære Kurven i et Punkt N. Forbindelsen mellem disse Punkter er gensidig éntydig. For at kunne bestemme Antallet af Sammenfald, kommer det an paa at sé, om tilsvarende Punkter M og N løber samme eller modsat Vej. Men findes der ét Sammenfaldspunkt, maa i Nærheden af dette Punkt M og N løbe modsat Vej — hvilket f. Eks. kan ses ved en Projektion af Kurven fra et Punkt af Hyperboloiden. Naar der findes ét Sammenfald, er der altsaa ét og kun ét til. Vi har altsaa:

Naar en Kurve af n-te Orden ligger paa en Hyperboloide og af enhver Frembringer af det ene System skærer i $(n-2)$ Punkter, vil der enten være 0 eller 2 (adskilte) Frembringere af det andet System, der berører Kurven. (7)

Vi vil nu særlig betragte den Kurve, der berøres af to Frembringere g. Gennem et vilkaarligt Kurvepunkt P drages de to Hyperboloidefrembringere f og g; den første af disse skærer endnu Kurven i $n-3$ Punkter M udenfor P, den anden i ét Punkt N udenfor P. Sammenhørende Punkter P og N løber modsat Vej ifølge det nysnævnte. Sammenhørende Punkter P og M maa derimod løbe samme Vej, da enhver Frembringer f skal skære Kurven i adskilte Punkter. Sammenfald i Rummet i et virkeligt Dobbeltpunkt er selvfølgelig intet Sammenfald paa Kurven. Betragtes nu Punkterne M og N som tilsvarende, naar de paa den nævnte Maade er fremkomne ved det samme Punkt P, kan man anvende det kombinatoriske Korrespondanceprincip. Til hvert Punkt N svarer ét Punkt P og altsaa $n-3$ Punkter M; til hvert Punkt M svarer $n-3$ Punkter P og altsaa ogsaa $n-3$ Punkter N. Der maa altsaa finde $2(n-3)$ Sammenfald Sted mellem et Punkt M og et tilsvarende Punkt N. Men to saadanne Punkter kan kun falde sammen i et virkeligt Dobbeltpunkt paa Kurven. Da nu omvendt hvert saadant to Gange vil give et Sammenfald, nemlig ét paa hver af de to Buer, der gaar derigennem, har man:

(8) En Kurve af n-te Orden, som ligger paa en Hyperboloide, og af enhver Frembringer af det ene System skærer i $n-2$ Punkter, medens to Frembringere af det andet System berører Kurven, maa nødvendigvis have $n-3$ virkelige Dobbeltpunkter.

For $n = 4$ følger denne Sætning ogsaa af „Indledning“ Sætn. 5, Side 47.

§ 12.

Om den ikke analytiske Eksistens af de betragtede Rumkurver.

Ved den tidligere Opstilling i „Indledning“ af Læren om plane Kurver af tredie og fjerde Orden gik jeg ud fra, at de Kurver, der behandledes, var Kurver tegnede paa et plant Tegnebrædt med en spids Blyant; der var paa den Maade ikke nogen Nødvendighed for et teoretisk Bevis for Eksistensen af Kurverne, da det tilmed blev paavist (Stng. 4 § 3), at Antallet af de Prøver, man maatte gøre, for at sé, om Kurven var af en bestemt Orden, altid var endeligt. Man behøver nemlig kun at prøve med Dobbelttangenterne, med Tangenter udgaaende fra en Spids og med Forbindelseslinier mellem to Spidser. Men det er ikke det eneste og neppe det mest fyldestgørende Synspunkt, hvorfra den Art Undersøgelser kan ses. Der er nemlig intet i Vejen for at opfatte Teorien som egentlig gyldig for Idealkurver, hvorom de tegnede Kurver kun giver en tilnærmet Forestilling. Denne ændrede Opfattelse medfører ingenlunde større Forandringer i Teorien, thi vel er Beviserne førte ved Siden af en Figur, men dette er kun sket for at fastholde Tankegangen, medens de iøvrigt er byggede paa Grundlag af Definitioner og Forudsætninger. Det eneste nye Spørgsmaal, der kommer op, er i Virkeligheden kun det, om der existerer andre Idealkurver med de postulerede Egenskaber end de algebraiske. Den almindelige Form maa være ikke-analytisk; en saadan er væsentlig karakteriseret ved, at ingen nok saa stor Del af Kurven, der blot ikke er hele Kurven, ikke bestemmer Resten, selv om denne tvinges ind mellem visse Grænser.

Det er ikke min Mening paa dette Sted at gennemføre Eksistensbeviserne for de plane Kurver i sine Enkeltheder. Dette vil ikke vise sig særlig vanskeligt, men her vil jeg nøjes med i Korthed at sige saameget, at der herigennem fremkommer et Grundlag for de tilsvarende Eksistensbeviser i Rummet.

Alle de af os betragtede plane Kurver var sammensatte af elementære Buer d. v. s. Buer af Kurver af anden Orden. Det første og afgørende Spørgsmaal bliver da det, om der eksisterer ikke analytiske Kurver af anden Orden. Det er for det første givet, at man kan sammensætte en Oval af algebraiske Buer, f. Eks. Cirkelbuer. Men man kan komme videre. Jeg vil paa dette Sted nøjes med at henvise til visse analytiske Udviklinger særlig et Arbejde af Hr. J. L. W. V. Jensen: „Om konvekse Funktioner og Uligheder mellem Middelværdier“ [1]). En endelig entydig og reel Funktion $\varphi(x)$ af en reel Variabel x siges der at være konveks, naar man har

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

hvor x_1 og x_2 er to vilkaarlige Værdier af x i Intervallet. Det bevises yderligere (som specielt indbefattet i almindeligere Uligheder), at man maa have:

$$\varphi\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{a_1 + a_2}\right) \leqq \frac{a_1\varphi(x_1) + a_2\varphi(x_2)}{a_1 + a_2}.$$

Da nu $\varphi(x)$ godtgøres at være kontinuert, følger heraf straks, at Kurven $y = \varphi(x)$ taget i Intervallet fremstiller en Bue, der ikke af nogen ret Linie kan skæres i flere end 2 Punkter. Det bevises yderligere, at $\varphi(x)$ i ethvert Punkt enten har en enkelt eller to Differentialkvotienter, en fremadgaaende og en tilbagegaaende, svarende til, at en Kurve af anden Orden kan have fremspringende Punkter af første Art. Men en konveks Funktion behøver ikke at være analytisk. Som Eksempel nævnes l. c.

$$\varphi(x) = \sum_{v=1}^{v=\infty} c_v(x - x_v),$$

hvor $\sum c_v$ er en uendelig konvergent Række med positive Led, og x_1, x_2 ... en uendelig Række af voksende reelle Tal beliggende i et endeligt Interval.

Til vort Brug kan man som konveks Funktion $\varphi(x)$ ogsaa tage Integralet af en vilkaarlig reel, positiv og stedse voksende ikke analytisk Funktion. Danner man det femdobbelte Integral af $\varphi(x)$, faar man en ny konveks Funktion, hvis fem første Differentialkvotienter man i et bestemt selvvalgt Punkt kan give vilkaarlige positive Værdier.

Ved Sammensætning — særlig Spejling enten i elementærgeometrisk eller projektiv Forstand — kan man af de dannede elementære Buer konstruere ikke analytiske Kurver af anden Orden. En saadan, der ligger helt i det endelige, vil vi kalde en Oval.

For det følgendes Skyld er det af væsentlig Betydning, at der eksisterer, hvad Dr. Bøhme kalder elliptisk krummede Ovaler ɔ: Ovaler, hvis femdobbelt rørende Keglesnit alle er Ellipser [2]). At dette er Tilfældet er afhængigt af, at de fem første Differentialkvotienter tilfredsstiller en vis Ulighed. Da nu for de her benyttede Buers Vedkommende de 5 første Differentialkvotienter varierer kontinuert med Punktet, kan man altid være sikker paa Eksistens af endelige Buer af elliptisk krummede Ovaler. Af saadanne Buer kan man altid danne hele Ovalen. I et vist endeligt Antal af Punkter paa Ovalen vil der ganske vist ved denne Konstruktion optræde Spring i de højere Differentialkvotienter, men dette forhindrer, saavidt jeg

[1]) Nyt Tids. f. Mathematik 1905, S. 49; sé ogsaa „Om konvekse Omraader“ af J. Hjelmslev smsts. S. 81.
[2]) Se Böhme: Über geometrische Approximationen-Dissertation. Göttingen.

ser, ikke, at man i alt væsentligt kan bruge de samme Raisonnementer som findes l. c. til at bevise den mærkelige Sætning, at ethvert Keglesnit, der gaar gennem 5 Punkter af Ovalen, maa være en Ellipse.

Plane Kurver af tredie og fjerde Orden dannes nu ved Sammensætning og Afrunding af elementære Buer.

Vi vil ikke i det enkelte indlade os herpaa, men straks gaa over til Rumkurverne. Det er øjensynligt, at Fordringen til et Eksistensbevis her optræder med større Styrke end ved de plane Kurver, da Forsøg paa f. Eks. at tegne en Kurve af fjerde Orden paa en Hyperboloide ikke kan være af den Art, at den giver nogensomhelst Garanti for, at Kurven virkelig bliver af den forlangte Orden.

Lad os straks gaa over til at sé paa, hvilken Betingelse der maa være tilfredsstillet, for at en Skæringskurve mellem to Kegler af anden Orden kan være af fjerde Orden. Vi vil begynde med at antage, at den ene af Keglerne er algebraisk, altsaa en Keglesnitskegle. Denne Kegles Toppunkt være O, Keglen selv (O); den anden ikke algebraiske Kegle vil vi betegne ved (O_1), dens Toppunkt ved O_1. Vi vil betragte Projektionen af Rumkurven fra O_1 ind paa en fast Plan π. En vilkaarlig Plan μ skærer (O_1) i en Kurve af anden Orden, hvis Projektion paa π er Sporet G_1^2 af (O_1), medens de Keglesnit, hvori (O) skæres af π, projiceres i Keglesnit γ. Skæringspunkterne mellem Rumkurven og μ projiceres i Skæringspunkterne mellem G_1^2 og γ. Det kommer nu aabenbart kun an paa — selv om ganske vist γ er Billede af to Keglesnit paa (O) — at G_1^2 af ethvert Keglesnit γ højst skærer i 4 Punkter. Der eksisterer ingen ikke-algebraisk Kurve af anden Orden, der af et aldeles vilkaarligt Keglesnit skæres i højst 4 Punkter, thi man kan jo altid lægge et Keglesnit gennem 5 Punkter af G_1^2; men i det Tilfælde, der foreligger, er γ heller ikke vilkaarligt, idet det stadig berører to faste reelle eller imaginære Linier a og b, nemlig Sporene af de to Tangentplaner til (O), man kan lægge gennem Linien OO_1.

Vi vil nu først bemærke:

(1) Naar to Kurver af anden Orden højst har 4 Tangenter fælles, vil de ogsaa højst have fire Punkter fælles og omvendt.

Naar de to Kurver nemlig intet Punkt har fælles, vil de have 0 eller 4 fælles Tangenter; har de to Punkter fælles, vil de ogsaa have to Tangenter fælles; har de 4 Punkter fælles, vil de have 0 eller 4 fælles Tangenter. Af disse Sætninger, der er beviste i „Indledning“ Sætn. 4 Side 19, følger (1); tillige bemærkes, at to sammenfaldende Punkter giver to sammenfaldende Tangenter og omvendt.

Tager man nu den reciprokke Figur til den ovenfor nævnte, der dannes af en ikke-analytisk Kurve af anden Orden i Forbindelse med to rette Linier a og b, faar man en ny Kurve af anden Orden i Forbindelse med to faste Punkter A og B. Det kommer altsaa an paa at finde en ikke-analytisk Kurve af anden Orden, der af alle de Keglesnit, der gaar gennem to faste Punkter A og B, højst skærer i 4 Punkter.

Vi vil nu først antage, at A og B er konjugert imaginære. Da disse ved en reel Omprojektion kan bringes til at falde i Cirkelpunkterne, kommer det an paa, om der findes ikke-analytiske Kurver af anden Orden, der af enhver Cirkel højst skæres i 4 Punkter. Man kan nu vise:

En tilstrækkelig Betingelse for, at en Kurve af anden Orden af en Cirkel højst kan skæres i 4 Punkter (er bicirkulær) er den, at dens Evolut er af fjerde Klasse. (2)

Lad os antage, at et Punkt M ikke ligger paa Kurven G. En Cirkel med Centrum i M og med en tilstrækkelig lille Radius vil da ikke have noget Punkt fælles med Kurven. Vokser Radien, medens Centret bibeholdes, vil der tilkomme 2 Skæringspunkter mellem Cirklen og G, naar den første overskrider en Stilling, hvor den berører G d. v. s. naar en Normal til denne Kurve gaar gennem M. Da der gennem M højst gaar 4 Normaler til G ifølge Forudsætningen, vil der ogsaa højst 4 Gange kunne ske Ændringer i Antallet af Skæringspunkter mellem G og Cirklen (med $+2$ eller -2 hver Gang). Ifald G nu ligger helt i det endelige, er en Oval, vil man ende med 0 Skæringspunkter, naar Cirklens Radius er bleven uendelig stor; da den altsaa højst 2 Gange kan have vundet Skæringspunkter ved Overgangene, vil den i en vilkaarlig af sine Stillinger højst kunne have havt 4 Punkter fælles med Ovalen.

Selv om G ikke ligger helt i det endelige, kan en Cirkel under den nævnte Betingelse ikke skære i flere end 4 Punkter. I saa Fald vil ganske vist den uendelig store Cirkel skære Kurven i 2 Punkter, men fire Overgange gennem tabte og vundne Punktpar tillader, som man let ser, heller ikke her, at Cirklen i en Mellemstilling har skaaret i 6 Punkter.

Beviset er ogsaa gyldigt i det Tilfælde, at Centret M ligger paa Kurven. I saa Fald begynder den tilstrækkelig lille Cirkel med Centrum i M ganske vist med at skære i 2 Punkter, men gennem M gaar da ogsaa kun 3 Normaler foruden Normalen i selve Punktet M.

Vi skal nu sé, at der foruden Keglesnit eksisterer Kurver af anden Orden, hvis Evolut er af fjerde Klasse. Man behøver til det Brug kun at bestemme en vilkaarlig endelig fuldstændig kontinuert Kurve af anden Orden og til den tegne to paa hinanden vinkelrette Tangenter. Lad Røringspunkterne være A og B, medens Tangenterne skære hinanden i O. Ved affine Transformationer kan man aabenbart give Stykker OA og OB aldeles vilkaarlige Værdier. En Evolvent A_1B_1 til denne Bue begyndende i et Punkt A_1 af OA udenfor det endelige Stykke OA maa være en elementær Bue, da den hverken har Spidser, Infleksionspunkter, Dobbeltpunkter eller Dobbelttangenter, og Tangenterne i A_1 og B_1 ikke yderligere kan skære Kurven. Man kan dernæst i de andre Kvadranter dannede af de to paa hinanden vinkelrette Linier OA og OB tegne elementære Buer, der paa fuldstændig kontinuert Maade men med Spidser i A og B slutter sig til den første. Man faar derved bestemt en Kurve $ABCD$, der er af fjerde Klasse. Fra O og altsaa fra ethvert Punkt („indeni“ Kurven), hvortil man kan komme fra O uden at overskride Kurven $ABCD$, udgaar nemlig 4 Tangenter. Fra ethvert Punkt „udenfor“ Kurven udgaar der derfor 2 Tangenter. Af Evoluterne A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 og D_1A_1, til de fire Buer AB, BC, CD og DA

kan man aabenbart danne en fuldstændig kontinuert lukket Kurve. Denne kan af ingen Cirkel skæres i flere end 4 Punkter og er af anden Orden. Det sidste er en Følge af, at der fra hvert uendeligt fjernt Punkt udgaar 2 Tangenter til Kurven og at den uendelig fjerne rette Linie ikke skærer denne, saa at den maa være af anden Klasse.

De fire Buer, hvoraf Evoluten dannedes, kan være ikke-analytiske og kan tilmed vælges uafhængige af hinanden. Hele Kurven $A_1B_1C_1D_1$ er derfor ikke analytisk. Særlig bemærkes, da vi faa Brug derfor i det følgende, at der sikkert maa findes Kurver G^2 af den her omtalte Art (bicirkulære Ovaler), der ikke med en Inversion kan gaa over i sig selv. Men paa den anden Side kan man ogsaa specielt vælge Buerne $AB \, .. \, DA$ saaledes, at Kurven G^2 faar to paa hinanden vinkelrette Symmetriakser.

Vi vil nu benytte os af det udviklede til at konstruere ikke-analytiske Kurver af fjerde Orden paa en Kugleflade. Deraf følger saa, at der findes saadanne Rumkurver paa enhver konveks Keglesnitsflade. Vi behøver blot ved en stereografisk Projektion ud fra et Punkt O af Kuglefladen at afbilde en vilkaarlig bicirkulær Oval ind paa Kuglefladen.

Lad nu Ovalen Γ være en saadan, der har to paa hinanden vinkelrette Symmetriakser a og b. Lad Planen Oa skære Kuglen i en Lillecirkel α, og lad A være Toppunktet af den Kegle, der langs α er omskrevet om Kuglen. At to Kurvepunkter M og N af Γ ligger symmetrisk med Hensyn til a kan udtrykkes ved, at en vilkaarlig Cirkel gennem M og N skærer a under ret Vinkel. En vilkaarlig Cirkel paa Kuglefladen, der gaar gennem Billederne M_1 og N_1 af M og N vil derfor skære α under ret Vinkel d. v. s. Linien M_1N_1 gaar gennem A. Den paa Kuglefladen bestemte Rumkurve er altsaa en Skæringskurve mellem to Kegler af anden Orden, hvis Toppunkter er Polerne med Hensyn til Kuglen for Planerne Oa og Ob.

Men den benyttede cycliske Oval vil almindeligvis ikke have Symmetriakser og ikke ved nogen Inversion gaa over i sig selv. Den paa Kuglefladen liggende Rumkurve vil derfor almindeligvis ikke have nogen dobbelt omskreven udfoldelig Flade, der er sammensat af to Kegler.

Da Ovalen ikke behøvede at være analytisk, har man:

(3) En Rumkurve af fjerde Orden kan eksistere som Skæringslinie mellem to ikke-analytiske Kegler af anden Orden[1].

Da vi tillige har bevist, at der (i hvert Fald paa en Kugle) eksisterer Rumkurver af fjerde Orden (uden tredobbelte Sekanter), hvis dobbelt omskrevne udfoldelige Flade ikke er sammensat af to Kegler, har vi i Henhold til Slutningen af § 8 (Side 329) godtgjort, at der findes Rumkurver af fjerde Orden, der har andre karakteristiske Tal end de, der gælder for algebraiske Rumkurver.

Ligger den ved Konstruktionen benyttede Kurve Γ ikke helt i det endelige, faar man paa Kuglen en almindeligvis ikke-analytisk Rumkurve af fjerde Orden med et Dobbeltpunkt.

[1]) At Punktet O kan opfattes som et isoleret Punkt paa Kurven, behøver vi ikke at tage Hensyn til.

Vi vil nu holde os til den Antagelse, at den ene af Kuglerne er en Keglesnitskegle; man kan da ved Hjælp af Dr. Bøhmes ovennævnte Sætning komme væsentlig videre. Denne kan nemlig i Henhold til det foregaaende udtrykkes paa følgende Maade:

Der eksisterer Ovaler, der af enhver Hyperbel skærer i højst 4 Punkter. (4)

En Hyperbel er et Keglesnit, der gaar et uendelig fjernt (selvfølgeligt reelt) Punkt. Da et vilkaarligt Punkt ved en Omprojektion altid kan bringes til at falde uendelig fjernt, kan man, naar et vilkaarligt fast Punkt P i Planen er givet, altid bestemme en analytisk eller ikke analytisk Kurve af anden Orden, der af ethvert Keglesnit, der gaar gennem P, skæres i højst 4 Punkter. Med Benyttelse af (1) har man da ogsaa:

Naar en ret Linie l i Planen er givet, kan man altid finde en Kurve Γ af anden Orden, der af ethvert Keglesnit, der berører l, højst skæres i 4 Punkter. (5)

Vi maa lægge Mærke til, at ifølge Konstruktionen vil Punktet P altid ligge udenfor den konstruerede Kurve, ligesom ogsaa l vil skære sin tilsvarende Kurve Γ.

Lad nu l og Γ høre sammen paa den nævnte Maade, og lad m være en vilkaarlig ret Linie i deres Plan, der skærer l i S. Man lægger et vilkaarligt fast Keglesnit γ, der berører l og m og desuden skærer Γ. Paa en ret Linie, der gaar gennem S men ikke ligger i Planen (lm) vælges endvidere to faste Punkter A og B. De to Kegler $(A\gamma)$ og $(B\Gamma)$ vil da skære hinanden i en Rumkurve af fjerde Orden. Da $(A\gamma)$ aabenbart kan være en aldeles vilkaarlig Keglesnitskegle, har man altsaa:

Paa enhver forelagt Keglesnitskegle kan bestemmes en ikke analytisk Rumkurve af fjerde Orden som Skæringslinie med en ikke analytisk Kegle af anden Orden. (6)

Lad Γ paany være en Kurve af anden Orden, der af alle de Keglesnit, der gaar gennem et givet Punkt A udenfor Kurven, skærer i højst 4 Punkter. Er B et vilkaarligt fast Punkt af Γ, vil denne altsaa af Keglesnit, der gaar gennem A og B højst skæres i 3 Punkter udenfor B. Lad os nu gennem A og B drage 2 Linier CA og CB, der skærer hinanden i C og ikke ligger i Γ's Plan. Gennem disse to Linier lægger vi en Hyperboloide; denne vil af Keglen $(C\Gamma)$ skære i en Rumkurve af tredie Orden, hvilket man ser ved at projicere fra C. Man har altsaa:

Paa en vilkaarlig Hyperboloide findes der ikke-analytiske Rumkurver af tredie Orden. (7)

I Beviset for (6) er der intet i Vejen for, at man kan lade den der benyttede rette Linie m være en Tangent til Γ. Rumkurven R^4 faar derved et Dobbeltpunkt. Projicerer man Kurven fra dette Punkt C ind paa en Plan, faar man en ny Kurve af anden Orden Γ_1. Projektionerne af plane Snit i Keglen $(A\gamma)$ bliver Keglesnit, der alle berører den faste Linie m i et fast Punkt $(m \,.\, AC)$. Tager man nu den reciprokke Figur til den herved bestemte, faar man:

Der eksisterer ikke-analytiske Kurver Γ_1 af anden Orden, der af alle de Keglesnit, der gaar gennem et bestemt fast Punkt A af Kurven (8) og der har en fast Tangent a (der ikke berører Γ_1), højst skærer i 3 Punkter foruden i A.

Ved Hjælp af denne Sætning kan man let bevise:

(9) Paa enhver Keglesnitskegle findes ikke-analytiske Rumkurver af tredie Orden.

Lad os nemlig gennem det i Sætning (8) nævnte Punkt A drage en ret Linie, som ikke ligger i Plan med Γ_1, og lad os paa denne Linie vælge to Punkter B og C. I Γ_1's Plan lægger vi et Keglesnit γ, der i A berører den i Sætningen nævnte Linie a. De to Keglefläder $(B \,.\, \Gamma_1)$ og $(C \,.\, \gamma)$ vil da skære hinanden i en Rumkurve af tredie Orden, hvilket ses ved Projektion fra B.

I det foregaaende har vi vist, at der eksisterer ikke-analytiske Kurver af den Beskaffenhed, at de af alle de Keglesnit, der gaar gennem et Punkt A af Kurven og desuden et Punkt B udenfor denne, højst skærer i 3 Punkter udenfor A. Men det har stadig været Forudsætningen, at Punktet B ligger udenfor Kurven. Ved Sætning (8) er vi dog kommet noget videre, idet det viser sig, at man ogsaa kan lade A og B falde sammen. Vi har i det følgende ogsaa Brug for den Mulighed, at B ligger indeni Kurven; Spørgsmaalet er, om saadanne Kurver af anden Orden eksisterer som ikke-analytiske. Det er ikke lykkedes mig at give et virkelig tilfredsstillende Bevis for denne Eksistens; følgende Slutninger gør den dog sandsynlig. Vi gaar her ud fra den i (8) nævnte Kurve Γ_1; lad den der nævnte Linie a, der blot ikke maatte være Tangent til Γ_1, skære denne Kurve anden Gang i B. Naar vi i det følgende taler om et Liniestykke mener vi dermed Indbegrebet af alle Liniestykkets Punkter, Endepunkterne medindbefattede. Vi antager endvidere, at Γ_1 ligger helt i det endelige, hvilket i hvert Fald kan opnaas ved en Omprojektion; de omtalte Liniestykker skal da ogsaa overalt være endelige. Det, som det kommer an paa at vise, er, at der findes et endeligt Liniestykke AX, der ligger indeni Γ_1, af den Beskaffenhed, at ethvert Keglesnit, der gaar gennem A og et Punkt af AX, højst kan have 4 Punkter fælles med Γ_1. Hele Liniestykket AB kan ikke være et Liniestykke AX, thi gennem A og B kan man sikkert lægge Keglesnit, der har 6 Punkter fælles med Γ_1. Vi tager da Midtpunkterne B_1, B_2, B_3 ... af AB, AB_1, AB_2. Paa den Maade maa man engang komme til et endeligt Liniestykke AB_r, der kan benyttes som et Stykke AX. Naar nemlig et Punkt Y langs a konvergerer mod A, maa et Keglesnit γ, der gaar gennem A og Y, konvergere mod at tilhøre en Samling af Keglesnit, der bestaar af: 1) de Keglesnit, der berører a i A, 2) de Liniepar, der har A til Dobbeltpunkt, 3) de Dobbeltlinier, der gaar gennem A. Men ingen af disse kan have flere end 3 fra A forskellige Punkter fælles med Kurven; det er da heller ikke muligt, at γ kan have det. (Man ser, at vi ikke har paavist nogen bestemt Grænsestilling for en vis Række Keglesnit γ, ligesom i Tilfældet 3) Grænsestillingen kan berøre i A og samtidig have Toppunkt i A).

Ad selvsamme Vej kan man paavise, at naar en Kurve af alle de Keglesnit (i en vis Samling), der gaar gennem et Kurvepunkt A, skærer i højst s Punkter udenfor A, saa maa man kunne finde et Punkt X i endelig Afstand fra A af den

Beskaffenhed, at Kurven af ethvert Keglesnit i Samlinger, der gaar gennem A og X, højst skæres i $s+1$ Punkter.

Vi vil nu sé paa Eksistensen af Rumkurver af fjerde Orden med Trisekanter beliggende paa en Hyperboloide. Vi gaar her atter ud fra en Kurve Γ af anden Orden, der indeholder et Punkt A af den Beskaffenhed, at Γ af ethvert Keglesnit, der gaar gennem A og et andet fast Punkt B, højst skæres i 3 Punkter udenfor A. Vi vælger dernæst i Figurens Plan et fast Punkt C udenfor Γ saaledes, at den rette Linie BC skærer Γ i to Punkter. Vi vil nu paa Γ anvende en kvadratisk Transformation med A, B og C til Grundpunkter; man kan f. Eks. vælge en involutorisk Transformation, der lader hvert af Punkterne A, B og C uforandret. Efter de gjorte Forudsætninger maa Γ gaa over i en Kurve af tredie Orden Γ^3, der har A til Dobbeltpunkt, og gaar én Gang gennem hvert af Punkterne B og C. Endvidere vil Γ^3 af ethvert Keglesnit α, der gaar gennem A og B, udenfor disse Punkter højst skæres i 3 Punkter. I Henhold til de foregaaende Bemærkninger kan man nu ogsaa i Nærheden af B finde et saadant Punkt B_1, at Γ^3 af ethvert Keglesnit, der gaar gennem A og B_1, udenfor A højst skærer i 4 Punkter (af hvilket det ene kan ligge nær ved B_1). Vælger man nu udenfor Figurens Plan to rette Linier AD og BD, der skærer hinanden i et Punkt D, vil en Hyperboloide lagt gennem disse rette Linier, skære Keglen $(D\,.\,\Gamma^3)$ i en Rumkurve af fjerde Orden med Trisekanter. Naar B kan ligge vilkaarligt i Forhold til Γ, er det muligt, at der fra B_1 kan udgaa 0, 2 eller 4 Tangenter til Γ^3 ɔ:

P a a e n v i l k a a r l i g H y p e r b o l o i d e f i n d e s i k k e - a n a l y t i s k e K u r v e r a f f j e r d e O r d e n m e d 0, 2 e l l e r 4 b e r ø r e n d e T r i s e k a n t e r. (10)

Ved fortsat Anvendelse af kvadratiske Transformationer i Forbindelse med det Middel, at man erstatter et Kurvepunkt med et nærliggende udenfor Kurven, kan man dernæst ogsaa vise Eksistensen af de Kurver af n-te Orden paa en Hyperboloide, vi i det foregaaende har behandlet[1]).

Vi har i vore tidligere Raisonnementer benyttet os af, at Kurven var sammensat af visse elementære Buer d. v. s. Dele af Kurver af tredie Orden. Vi bemærker i den Anledning, at ved de Kurver, hvis Eksistens vi har godtgjort, er Antallet af Hyperoskulationspunkter bestemt uafhængig af en saadan Forudsætning. Der er altsaa et endeligt Antal af disse Punkter paa hver Kurve. Men deraf følger, at man om ethvert Punkt, der ikke netop er et af Hyperoskulationspunkterne, kan afgrænse et saadant Gebet af Kurvepunkter, at ikke fire af disse kan ligge i en Plan Γ.

§ 13.

Nogle Sætninger om Flader.

En vindskæv Flade frembringes af rette Linier, hvis Stillinger hyppigst bestemmes ved, at Linien stadig skal skære tre givne Ledelinier. Indeholder en Flade af anden Orden en ret Linie f, vil en vilkaarlig Plan gennem denne desuden skære

[1]) Det benyttede Middel er det naturligvis ikke min Mening at tillægge en fuldt eksakt Karakter.

Fladen i endnu en ret Linie g. Forudsættes det nu, at Fladen ikke er en Kegleflade, ser man let herved, at Fladen maa indeholde to Systemer af rette Linier saaledes, at en vilkaarlig Linie af det ene System skærer en vilkaarlig af det andet. Defineres en Flade af n-te Orden som en saadan Flade, der af en vilkaarlig ret Linie skæres i højst n Punkter — et Antal der skal kunne naas, — medmindre da Linien (én eller flere Gange) har uendelig mange kontinuert paa hinanden følgende Punkter fælles med den, har man altsaa:

(1) En vindskæv Flade af anden Orden maa nødvendigvis være algebraisk.

Derimod findes der naturligvis ikke-analytiske Flader af anden Orden, naar disse ikke er vindskæve. Tiltrods for, at dette ligger noget mere til en Side, vil jeg udtrykkelig vise, at der findes ikke-analytiske Omdrejningsflader af anden Orden; af disse kan man ved projektive Transformationer udlede andre, der ikke behøver at være Omdrejningsflader. Lad Omdrejningsaksen være a; en Plan gennem denne maa skære Fladen i en Kurve af anden Orden, der har a til Symmetriakse. Man har da:

(2) En Omdrejningsflade, hvis Meridiansnit er en Kurve af anden Orden med Omdrejningsaksen til Symmetriakse, er af anden Orden, saafremt Symmetrilinien skærer Kurven; saafremt den ikke gør det, er Fladen ikke af anden Orden, medmindre den da er algebraisk.

En ikke-analytisk Flade af anden Orden maa for det første være konveks i den Forstand, at ingen Tangentplan til den kan have noget Punkt udenfor Røringspunktet fælles med Fladen. I modsat Fald vilde nemlig Forbindelseslinien mellem Røringspunktet og et yderligere Skæringspunkt være en ret Linie, der med vore sædvanlige Vedtægter havde flere end 2 Punkter fælles med Fladen. Denne blev da vindskæv og altsaa algebraisk.

Hvis nu — idet vi gaar over til Beviset for (2) — Meridiankurven G^2 ikke skar Omdrejningsaksen a, maatte der i hvert Fald findes (mindst) ét Punkt A af Kurven, der laa nærmest ved Aksen. Men da Tangentplanen i et saadant Punkt aabenbart vilde skære Fladen, maatte denne enten være algebraisk eller af højere end anden Orden.

Lad os dernæst antage, at a skærer G^2 i et Punkt A. Tangentplanen α i dette Punkt maa staa vinkelret paa Aksen og den vil kun have Punktet A fælles med Fladen. Der vil altsaa sikkert findes Planer, som ikke har noget Punkt fælles med Fladen. Man kan derfor i hvert Fald efter en let bestemmelig Centralkollineation gaa ud fra, at G^2 ligger helt i det endelige.

Naar nu en ret Linie l skærer Aksen, ser man straks, at den højest kan have 2 Punkter fælles med Fladen. For dernæst at bestemme Skæringspunkterne mellem Fladen og en ret Linie l, der ikke skærer a, drejer vi efter den sædvanlige Methode i den deskriptive Geometri Linien l om a og danner derved en Omdrejningshyperboloide; lad dennes Meridiankurve i den Plan, hvori G^2 tænkes at ligge, være en Hyperbel H^2 med a til transvers Akse. Skæringspunkterne mellem G^2 og H^2 bestemmer de Parallelcirkler, hvorpaa de søgte Skæringspunkter ligger. Skæringspunkterne mellem G^2 og H^2 ligger parvis symmetrisk med Hensyn til a; Antallet af Skæringspunkter mellem l og Fladen bliver derfor det halve af Antallet af Skæringspunkter mellem G^2 og H^2.

Lad nu disse Kurver skære hinanden i to Punkter A_1 og A_2, der ligger symmetrisk med Hensyn til a. Fra ethvert Punkt af det endelige Liniestykke A_1A_2 udgaar ingen Tangent til G^2, og fra ethvert Punkt, der ligger paa det uendelige Liniestykke A_1A_2 udgaar ingen Tangenter til Hyperblen. Deraf følger, at en vilkaarlig ret Linie i Kurvernes Plan, der jo enten maa gaa gennem A_1 eller gennem A_2 eller skære et af Liniestykkerne A_1A_2, maa have to (adskilte eller sammenfaldende) Skæringspunkter fælles med mindst én af Kurverne. Men heraf følger atter, at disse ikke kan have nogen Fællestangent, thi man vilde altid kunne finde en nærliggende til en saadan, der ikke havde noget Punkt fælles hverken med G^2 eller med H^2. Men naar to Kurver af anden Orden ikke har Fællestangenter, vil de enten have 0 eller 4 Punkter fælles d. e. Linien l har enten 0 eller 2 Punkter fælles med Fladen; de to Skæringspunkter kan naturligvis rykke sammen i et Røringspunkt.

Af Udviklingerne i den forrige § følger det, at der eksisterer G^2, der har en ret Linie a til Symmetriakse og tillige skærer denne.

Om Flader af anden Orden gælder nogle af de Sætninger, der sædvanligvis beviser om Keglesnitsflader; man ser f. Eks. let, at Fladen maa være af anden Klasse, naar man ved Klassen forstaar det højeste Antal af Tangentplaner, der kan lægges gennem en ret Linie.

Antallet af de Punkter, man kan vælge vilkaarligt af Fladen — hvorefter ethvert yderligere er underkastet Betingelser — er rimeligvis 9. Dette har jeg ikke formaaet at bevise, men derimod er det let at bevise den rigtignok meget speciellere Sætning, at man af en Flade af anden Orden, *der skal ligge helt i det endelige*, højest kan vælge 5 Punkter aldeles vilkaarligt.

Vi vil nu gaa over til vindskæve Flader. Har de 3 Ledekurver bestemte Tangenter i de Punkter, hvori de skæres af en Frembringer f (en Forudsætning, vi fastholder) vil der almindeligvis i ethvert Punkt M af f være en bestemt Tangentplan μ, og omvendt enhver Plan gennem f være Tangentplan i et bestemt Punkt af f; Forudsætningen herfor er kun, at ikke to af Tangenterne til Ledekurverne i de Punkter, hvori disse skæres af Frembringeren, ligger i samme Plan. Tangentplanen i et Punkt M defineres her som det geometriske Sted for Fladens Tangenter i M og en Tangent i M paa sædvanlig Maade som Grænsestilling for en Sekant. Heraf følger, at Snitkurven σ mellem Fladen og en Tangentplan μ faar et Dobbeltpunkt eller en Spids i Røringspunktet M. Et fra M forskelligt Skæringspunkt mellem σ og den gennem M gaaende Frembringer f maa derfor hidrøre fra en Dobbeltlinie paa Fladen d. v. s. et geometrisk Sted for saadanne Punkter N, der skal regnes som to sammenfaldende Punkter, naar man tæller Skæringspunkterne mellem Fladen og en vilkaarlig ikke tangerende ret Linie gennem N. Man har nu:

(3) En vindskæv Flade af tredie Orden har altid en retliniet Dobbeltlinie.

Den kan i hvert Fald ikke have en krumliniet Dobbeltlinie, da en plan Kurve af tredie Orden, der ikke indeholder en ret Linie, ikke kan have flere end ét Dobbeltpunkt. Lægger man nu gennem en vilkaarlig Frembringer f_1 en Plan μ, vil denne foruden i f_1 skære Fladen i en Kurve af anden Orden; denne skærer f_1 for det første i Planens Røringspunkt og den maa derfor skære f_1 i endnu ét Punkt N_1. Paa samme Maade faas et analogt Punkt N_2 paa en anden Frembringer f_2. Linien $N_1 N_2 = d$ maa være en Dobbeltlinie paa Fladen.

Naar en ret Linie l skærer en vindskæv Flade i Punkterne $M_1, M_2, .. M_n$, vil de Planer, man kan lægge gennem l og de gennem $M_1, M_2, .. M_n$ gaaende Frembringere være Tangentplaner. Man ser herved (som bekendt):

(4) En vindskæv Flades Orden og Klasse er ligestore — og omvendt.

Den dualistisk tilsvarende til en vindskæv Flade af tredie Orden maa derfor paany være en Flade af tredie Orden; en saadan vil derfor ogsaa altid indeholde en ret Linie d' af den Beskaffenhed, at enhver Plan, der gaar gennem d' og et udenfor d' liggende Punkt af Fladen, er en Dobbelttangentplan eller indeholder to Frembringere.

Af den Maade, hvorpaa vi har bestemt d og d', følger aabenbart, at enhver Frembringer maa skære baade d og d'. Lægger vi nu gennem en vilkaarlig fast Frembringer f_1 en Plan, der foruden i f_1 skærer i en Kurve af anden Orden G^2, har man i d, d' og G^2 tre Ledelinier for Fladen. Den sædvanlige Konstruktion af Frembringere viser, at ikke hele Linien d behøver at ligge paa Fladen. Ifald Skæringspunktet mellem G^2's Plan og d' ligger udenfor G^2, kan man gennem d' lægge to Røringsplaner til G^2, hvis Skæringspunkter med d bestemmer det Stykke af d, der ligger paa Fladen; Stykkets Endepunkter kaldes Kuspidalpunkter. Det er muligt, at d og d' falder sammen saaledes, at de bestemmer et givet vindskævt Element. Ogsaa i dette Tilfælde kan man aabenbart bestemme en vindskæv Flade ved d, d' og G_2, men gennem hvert Punkt af d gaar i saa Fald kun én Frembringer. Man kan derfor sige, at i dette specielle Tilfælde falder en Dobbeltlinie og en sædvanlig Frembringer sammen i d.

Vi vil nu sé, om der eksisterer ikke-analytiske vindskæve Flader af tredie Orden. Vi maa da ifølge ovenstaaende vælge to rette Ledelinier d og d', af hvilke den ene d i et Punkt A skærer en Kurve G^2 af anden Orden og lade G^2 være den tredie Ledelinie. Lad nu M være et Skæringspunkt mellem Fladen F^3 og en vilret Linie l i Rummet. Gennem M gaar en Frembringer, der skærer d, d', l og G^2. Man maa derfor faa alle Skæringspunkterne mellem l og F^3 ved at lægge en Hyperboloide gennem d, d' og l og bestemme dennes Skæringspunkter med G^2. Til hvert af disse Skæringspunkter svarer paa gensidig éntydig Maade et Skæringspunkt mellem F^3 og l. Men Hyperboloiden skæres af G^2's Plan i et Keglesnit, der gaar gennem A og Sporet A' af d' i samme Plan. Omvendt vil ethvert Keglesnit gennem A og A' kunne være Spor af en Hyperboloide gennem d, d' og en eller anden ret

Linie l. Det kræver altsaa, at man kan finde ikke-analytiske Kurver af anden Orden, der foruden i A skæres i højst 3 Punkter af ethvert Keglesnit, der gaar gennem A og A'. Men dette er ifølge den foregaaende § altid muligt, i hvert Fald naar enten A' ligger udenfor G^2 eller naar A' falder sammen med A, saaledes at den fuldstændig bestemte Linie AA' danner en endelig Vinkel med Tangenten til G^2 i A. Man har altsaa:

Der eksisterer sikkert ikke-analytiske vindskæve Flader af tredie Orden, i hvert Fald enten naar Fladen har Kuspidalpunkter eller naar d og d' falder sammen. (5)

Ved et aldeles lignende Raisonnement ser man ogsaa, at der eksisterer ikke-analytiske vindskæve Flader af fjerde Orden med to rette Dobbeltlinier — i hvert Fald, naar Fladen har Kuspidalpunkter.

INDHOLD.